Acerca de la probabilidad, la probabilidad condicional y el teorema de Bayes

HERNÁN C. DOVAL

"La probabilidad es la propia guía de la vida".
Obispo Joseph Butler

INTRODUCCIÓN

En términos coloquiales del lenguaje cotidiano, "probable" es aquello de lo que hay buenas razones para creer que se realizará o ocurrirá. Otra forma de definir "probabilidad" es "apariencia de verdad con fundamento".

La palabra "probabilidad", que existe ya desde antes de fines del siglo XVII, no tenía el significado actual de procedimiento aleatorio que produce frecuencias relativas estables. La palabra latina *probabilis* significó, entre otras cosas, algo como "merecedor de aprobación".

Ian Hacking, en el libro *El surgimiento de la probabilidad*, dice: "La imposibilidad de las antiguas locuciones muestra cuánto ha cambiado el significado y también nos ayudará a retrotraernos a sentidos aun más tempranos de la palabra. Un par de siglos atrás, se hablaba fácilmente de un 'probable doctor', queriendo decir, aparentemente, un médico en quien se podía confiar. Ya no hablamos de esa manera."

La probabilidad presenta dos aspectos, uno está conectado con el **grado de creencia garantizada por la evidencia** (*"probabilidad subjetiva"*) y el otro está referido a la tendencia, exhibida por algunos **dispositivos aleatorios donde interviene el azar** ("*probabilidad objetiva*"), como nuestro folclórico juego de la "taba", que producen frecuencias relativas estables. Ninguno de estos aspectos de la probabilidad fue conscientemente conocido por ningún grupo de investigadores antes de la época de Pascal.

Este significado dual antiguo persiste ambiguamente en el lenguaje actual. Algunos entienden que un acontecimiento "probable" significa la creencia de que el acontecimiento tiene más posibilidades de suceder; sin embargo, otros comprenden que un acontecimiento "probable" significa que tiene tantas posibilidades de suceder como otros acontecimientos.

El pasaje del concepto que denominamos "probabilidad subjetiva" al de uso actual en la investigación de "probabilidad objetiva" ha requerido varias condiciones. En primera instancia, el desarrollo de un sistema simbólico que facilite la suma y la multiplicación como el "álgebra" (palabra de origen arábigo). Por cierto, la vieja palabra que antaño se utilizaba en lugar de "azar" es "albur", que obviamente también es de origen árabe.

En segunda instancia, la necesidad de procesar y analizar los datos biológicos, hizo surgir a fines del siglo XIX la "biometría". La mecánica estadística requirió un análisis más profundo de los conceptos sobre la probabilidad, y entonces aparecen las bases fundamentales de la gran teoría estadística de la Europa occidental, a principios del siglo XX, debido inicialmente a la necesidad de los experimentos agrícolas y luego de los ensayos clínicos de la medicina.

Hacking lo expresa claramente cuando dice: "En particular, la ciencia médica no tenía esperanza de ser demostrativa; ni tampoco lo tenía la "magia natural" que es la precursora de la química. Es en los signos probables de los médicos y los alquimistas donde encontraremos los conceptos en evolución que hacen posible nuestra clase de probabilidad", y luego termina: "La vieja probabilidad, como hemos visto, es un atributo de la opinión. Las opiniones son probables cuando son aprobadas por la autoridad, cuando son atestiguadas y sustentadas por antiguos libros. Pero en Fracastoro y otros autores renacentistas leemos sobre signos que tienen probabilidades. Estos signos son los signos de la naturaleza, no los de la palabra escrita".

Cuando nos referimos a la *"probabilidad de ocurrencia de un evento"* expresamos un grado de **no certeza**. En términos de una posibilidad determinista, un hecho va a ocurrir o no, podemos expresarlo utilizando el lenguaje binario de las computadoras **0** o **1**: "**0**" significa que no va a ocurrir y "**1**" indica la certeza de que sí ocurrirá. Cuando hablamos de probabilidades, *para cualquier evento la probabilidad (P) será* $0 \leq P(evento) \leq 1$, es decir, esto se indica por un número que se encuentra **siempre entre el rango de 0 a 1**.

PROBABILIDAD

La expresión lógica o matemática de la ***"probabilidad"*** es como sigue. Si:

N (número total de posibilidades)
nA (número parcial del evento A)

Si un evento puede ocurrir en un **N** (número total) mutuamente exclusivo de probabilidades iguales y si **nA** (número parcial) de estos resultados tienen atributos A, entonces la probabilidad de A, se escribe como:

P(A) = (número parcial del evento A) / (número total de posibilidades)

P(A) = nA / N

Para representar más claramente la "probabilidad" se puede utilizar un diagrama de Venn, como se ve en la Figura 1, el rectángulo en el diagrama de Venn representa el universo del número total de posibilidades **(N)**, y el círculo define el número parcial de eventos de interés **(nA)**.

Cuando son eventos mutuamente exclusivos, otra propiedad de la probabilidad es que el *"evento opuesto"*, sucede cuando un evento dado *"no ocurre"*, y también se llama ***"evento complementario"***

probabilidad de No A = **P(No A) = 1 - P(A)**
Porque **P(No A) = 1 - P(A) = nNo A / N**

Ésta resulta así una **definición *a priori* de la probabilidad**, es decir que dadas ciertas condiciones se puede determinar la probabilidad de un evento antes de que éste suceda.

El ejemplo clásico son las probabilidades de la tirada de un dado, porque solamente hay 6 posibilidades de cómo puede caer un dado, y si queremos conocer las posibilidades de que salga un número par, sabemos que el número posible de caras pares del dado son 3 (los números 2, 4 y 6) y por lo tanto:

P(A) = nA / N **P(par) = 3 / 6 = 1 / 2 = 0,5**

El *"evento complementario"*, de la probabilidad del número impar, es:

P(No A) = 1 - P(A) **P(impar) = 1 – 0,5 = 0,5**

En otras situaciones, sin embargo, *no somos capaces de enumerar todas las posibilidades en las cuales puede ocurrir un evento* o aun conociendo todas las posibilidades no podemos adelantar si su distribución es solamente aleatoria. Si deseamos conocer qué pierna apoyan primero en el piso las personas al levantarse de la cama, sabemos que sólo hay dos posibilidades (excluyendo amputados), pero solamente podemos estimar la frecuencia relativa con estudios observacionales.

En esos casos, que abarcan toda la realidad médica de los ensayos clínicos, usamos la **definición de frecuencia relativa de la probabilidad**, que se define como el número de veces que el evento de interés ha ocurrido dividido por el número total de ensayos (u oportunidad para que el evento ocurra).

También utiliza el simbolismo **P(A) = nA / N**, pero debido a que está basado en datos empíricos y no en datos conocidos previamente, se llama **definición a *posteriori* de la probabilidad**.

Por ejemplo, la probabilidad de morir por un infarto en la Unidad Coronaria que estamos de guardia es 0,13 (13%), y se basa en el hecho de que en los últimos 500 pacientes 65 fallecieron (P = nA/N, P = 65/500 = 0,13).

Combinando probabilidades

Hay dos teoremas o reglas para combinar probabilidades que son importantes. *Primero consideraremos la:*

"*Regla de la adición en los eventos mutuamente exclusivos*"

Es decir, los eventos son mutuamente exclusivos si al ocurrir uno, el otro o los otros no pueden ocurrir.

La probabilidad de ocurrir ya sea de uno u otro es la *"suma"* de sus probabilidades individuales.

P(A o B) = P(A) + P(B)

Si existen más de dos eventos, también se suman:

P(A o B o C) = P(A) + P(B) + P(C)

En el diagrama de Venn (Figura 2), el hecho de que ocurra un evento parcial A o un evento parcial B hace que el resultado puede suceder tanto con el evento A como con el evento B. Debido a que ambas posibilidades pueden existir, se suman.

Un ejemplo de esto es lo siguiente: la probabilidad de obtener ya sea un 2 o un 4 en una tirada de un dado es: P (2 ó 4) = P(2) + P(4) = 1/6 + 1/6 = 2/6.

Es obvio, pero útil de reconocer, que la suma de las probabilidades individuales de todos los eventos mutua-

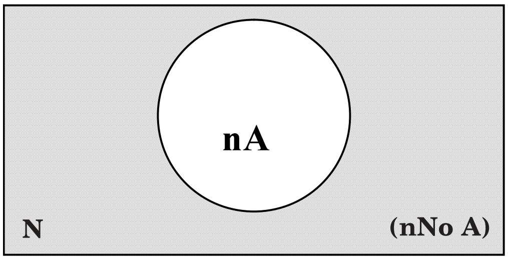

Figura 1

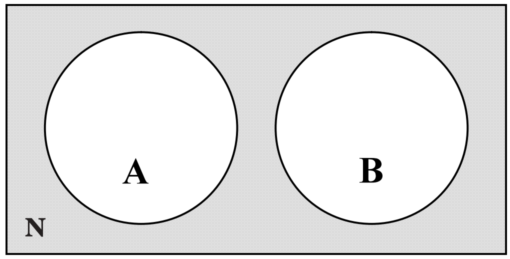

Figura 2

mente exclusivos debe ser igual a 1. En un dado la P(1 ó 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 6/6 = 1.

Para llevar esta abstracción a un ejemplo médico, podemos conocer la respuesta hipoglucemiante en 100 pacientes diabéticos con glucemias iniciales elevadas. Al categorizar las respuestas como: A) no bajó la glucemia, B) bajó de 1 a 30 mg% o C) bajó > 30 mg%; observamos que en 65 pacientes no bajó en absoluto, en 20 de 100 pacientes bajó de 1 a 30 mg% y en 15 de 100 más de 30 mg%. Entonces podríamos expresarlo como:

P (A) = 65/100 = 0,65 (65%)
P (B) = 20/100 = 0,20 (20%)
P (C) = 15/100 = 0,15 (15%)
Total = 100/100 = 1 (100%)

La probabilidad de que la glucemia baje algo, P (B o C), es:

P (A) = 65/100 = 0,65 (65%)
P (B o C) = 35/100 = 0,35 (35%)
Total = 100/100 = 1 (100%)

En esta situación, los eventos A, B y C son mutuamente exclusivos por definición, de manera tal que en conjunto la suma siempre debe abarcar a todos los pacientes y ser igual a 1.

En segundo lugar debemos considerar la:

"*Regla de la adición* "*modificada*" *en los eventos* "*no*" *mutuamente exclusivos*"

Cuando la posibilidad de dos eventos no son "mutuamente exclusivos" esto quiere decir que los dos eventos pueden, a veces, suceder simultáneamente; por lo tanto, la probabilidad de *"uno u otro"* evento *"no es la suma de sus probabilidades*.

Si observamos ahora el diagrama de Venn de la Figura 3, vemos que la posibilidad de los eventos A y eventos B se superponen parcialmente; por lo tanto, *no son mutuamente exclusivos*.

Si ahora sumamos los resultados del círculo de eventos "A" a los resultados del círculo de eventos "B", entonces sumamos los eventos del área sombreada (AB) dos veces. Por lo tanto, debemos matemáticamente sustraer los eventos del área sombreada (AB), para llegar al resultado correcto. De esta manera, la fórmula general de la adición (suma) queda:

P(A o B) = P(A) + P(B) – P(AB)

Es fácil darse cuenta de que, cuando los eventos son "mutuamente exclusivos", el área sombreada (AB) es igual a cero, y la fórmula es la que se utiliza con el diagrama de Venn de la Figura 2 [P(A o B) = P(A) + P(B)].

Consideremos cómo evaluar la probabilidad de eventos colaterales con un fármaco antihipertensivo. Observamos que 15 de 100 pacientes desarrollan hipotensión (A) y 20 tos (B). Pero también conocemos que en 5 pacientes coincidieron ambos efectos adversos (A y B). Entonces:

P (A) = 15/100 = 0,15 (15%)
P (B) = 20/100 = 0,20 (20%)
P (AB) = 5/100 = 0,05 (5%)
P (A o B) = P (A) + P(B) – P (AB) = 0,15 + 0,20 – 0,05 = 0,30 (30%)

Podemos afirmar que la probabilidad de desarrollar *"hipotensión o tos"* es del 30%.

En tercer lugar debemos considerar la:

"*Regla de multiplicación de eventos independientes*"

Es decir, si ocurren dos eventos independientes, donde la ocurrencia de uno no está relacionado con la ocurrencia del otro, la probabilidad de que ocurran juntos es el *producto* de las probabilidades individuales.

P(A y B) = P(A) × P(B)

Si existen más de dos eventos, también se multiplican:

P(A y B y C) = P(A) × P(B) × P(C)

En la representación en el diagrama de Venn (Figura 4), el hecho resulta sólo cuando simultáneamen-

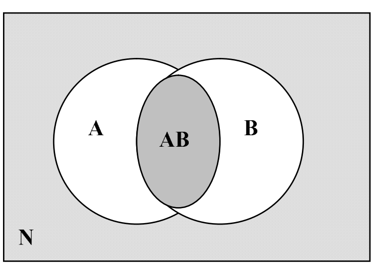

Figura 3

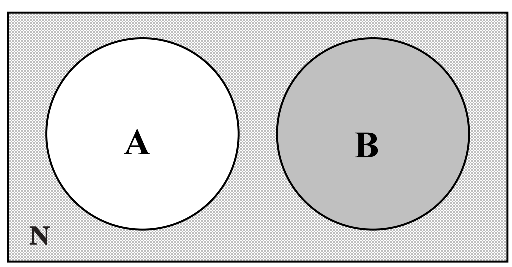

Figura 4

te ocurre un evento parcial A y un evento parcial B, para lo cual ambas posibilidades se multiplican entre sí para que aparezcan las dos posibilidades juntas.

Un ejemplo de esto es la probabilidad de que en la tirada de un dado consiguiera un número que es a la vez impar y divisible por 3. La probabilidad es:

P(impar y 3) = P(impar) × P(3) = 1/2 × 1/3 = 1/6. El único número que es a la vez impar y divisible por 3 es el mismo número 3.

Consideremos una situación en la que un médico residente recibe a un paciente con IAM; él sabe por la experiencia previa que la probabilidad de morir del paciente es 0,1 (10%). Al rato recibe un segundo paciente con IAM y quiere conocer cuál es la probabilidad de que tenga que notificar dos muertes. Como la posibilidad de muerte de uno y otro paciente no tienen ninguna relación, utiliza la ley de multiplicación de eventos independientes: P(A y B) = P(A) × P(B) = 0,1 × 0,1 = 0,01, o sea, sólo tiene una probabilidad del 1%. Si más tarde llega a recibir a un tercer paciente, ya sabe que la posibilidad de que los tres fallezcan en su guardia es remota, de sólo uno en mil.

Es interesante conocer que la probabilidad de la "ley de multiplicación de eventos" también se utiliza para conocer si los eventos son independientes. Si ellos son independientes, el producto de sus probabilidades individuales será igual a la probabilidad conjunta. Si no lo son, no son independientes. Ésta es la base de la prueba de significación de chi cuadrado.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

El concepto más importante de la teoría de la probabilidad es la idea de la *"independencia"* de los eventos. Informalmente hablando, dos eventos son *"independientes"* si el conocer que un evento ha ocurrido no nos dice "nada" de lo que ocurrirá con el otro evento.

Consideremos un ejemplo simple que nos permita corporizar el concepto. Pensemos en dos pacientes, ambos presentan un cuadro agudo de *"apendicitis"*, cada uno de ellos tiene un segundo evento, un cuadro de *"dolor abdominal"* el primero y una *"fractura de fémur"* el otro. Intuitivamente podríamos decir que el paciente con:

"Dolor abdominal" **(A) y** "a*pendicitis"* **(B)**, son eventos *"no independientes"*

"Fractura de fémur" **(A) y** "a*pendicitis"* **(B)**, son eventos *"independientes"*

Decimos que en el primer paciente no existe duda de que el cuadro de *"dolor abdominal"* **(A)** sí está relacionado, o está ***"condicionado"***, con la presencia de la *"apendicitis"* **(B)** (o sea que la probabilidad de que una persona tenga *"dolor abdominal"* será distinta si tiene o no tiene "a*pendicitis"*); y en el segundo la *"fractura de fémur"* **(B)** no tiene ninguna relación, o sea no está ***"condicionada"*** a que padezca un evento agudo como la *"apendicitis"* **(B)**.

En la primera situación, el paciente tiene dos eventos que *"no son independientes"*. La "*probabilidad*" de la ocurrencia de uno de los eventos [*"dolor abdominal"* **(A)**], es "*condicional"* (depende) de si el otro ha ocurrido [*"apendicitis"* **(B)**].

La probabilidad de **A** (*"dolor abdominal"*), "*dado"* que **B** (*"apendicitis"*) ha ocurrido, se llama *"probabilidad condicional"* de **A** *"dado"* **B**. Simbólicamente se escribe:

$$P(A \mid B)$$

Literalmente se escribiría:

$$P(\text{dolor abdominal} \mid \text{apendicitis})$$

La ilustración de *"probabilidad condicional"* se puede visualizar nuevamente en un diagrama de Venn (Figura 5) [consiste en un *cuadrado* que representa "todos los resultados **N** posibles", el círculo marcado **A** representa "todos los resultados que constituyen el evento **A** (*"dolor abdominal"*) y el círculo marcado **B** representa "todos los resultados que constituyen el evento **B** (*"apendicitis"*)].

Cuando hablamos de *"probabilidad condicional"*, el denominador se transforma en "todos los resultados del círculo **B**" (*"apendicitis"*), en lugar de "todos los resultados **N** posibles", y el numerador consiste en "todos los resultados que están en la parte de **A** (*"dolor abdominal"*) que también contiene los resultados pertenecientes a **B**" (*"apendicitis"*). Ésta es el área gris en el diagrama marcada como **AB** (*"dolor abdominal"* y *"apendicitis"*).

Si recordamos nuestra definición original de probabilidad:

$$P(A) = \frac{nA}{N}$$

Vemos entonces, que N, es nB

$$P(A \mid B) = \frac{nAB}{nB}$$

Bajemos a un ejemplo para entenderlo en concreto. En 200 pacientes consecutivos (N) que ingresaron en una guardia, se observaron 150 pacientes con *"dolor abdominal"* (A). Se diagnosticó *"apendicitis"* a 75 (B), de ellos 73 presentaban *"dolor abdominal"* (AB).

La probabilidad de "A" (*"dolor abdominal"*) es:

$$P(A) = \frac{n\,A}{N} = 150/200 = 0{,}75\ (75\%)$$

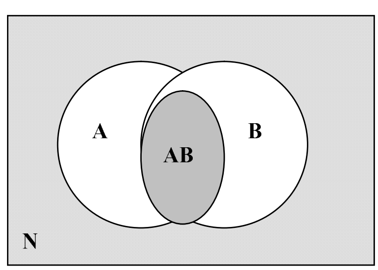

Figura 5

La *"probabilidad condicional"* de *"dolor abdominal"* en pacientes con *"apendicitis"* es:

$$P(A|B)=\frac{nAB}{nB}=73/75=0{,}97\ (97\%)$$

La probabilidad de presentar *"dolor abdominal"* [**P(A)**] en esa guardia es del 75%, pero la probabilidad de *"dolor abdominal"* en pacientes con *"apendicitis"* [**P(A|B)**] es del 97%.

Entonces, la *"probabilidad condicional"* es igual al número de resultados que se encuentran simultáneamente tanto en **A** como en **B (AB)**, dividido por el número total de los resultados en **B**.

Obtenemos un resultado similar si en lugar de obtener el cociente entre el número de pacientes en cada grupo, calculamos el cociente entre la probabilidad de nAB en toda la población y también la probabilidad de nB en toda la población.

P (A y B) = nAB/N = 73/200 = 0,3365
P (B) = nB/N = 75/200 = 0,375

$$P(A|B)=\frac{nAB/N}{nB/N}=0{,}3365/0{,}375=0{,}97$$

Esta nueva expresión nos permite un análisis lógico, que tendrá una gran utilidad conceptual.

$$P(A|B)=\frac{P(A\ y\ B)}{P(B)}$$

Se despeja el término **P(A y B)** pasando el término **P(B)** al otro lado de la igualdad, quedando entonces:

P(A y B) = P(A | B) × P(B)

Volviendo al ejemplo, la probabilidad de tener *"dolor abdominal"* y *"apendicitis"* [**P(A y B)**] surge de:

P(A y B) = P(A | B) × P(B) = 0,97 × 0,372 = 0,365

Conocemos que ésta es una *"probabilidad condicional"*, la probabilidad de "A" (*"dolor abdominal"*) y "B" [*"apendicitis"*) (**P(A y B)**], es igual a la *"probabilidad condicional"* de "A" (*"dolor abdominal"*) *dado* "B" (*"apendicitis"*) [**P(A|B)**], multiplicado por la probabilidad de "B" [*"apendicitis"*) (**P(B)**].

P(dolor abd. y apendicitis) =
P(dolor abd. | apendicitis) × P(apendicitis)

También podríamos expresar este concepto por su complemento. Inicialmente habíamos analizado la posibilidad de *"dolor abdominal"* en los pacientes con *"apendicitis"*. Podemos analizar la *"probabilidad condicional"* desde un enfoque diferente y complementario, preguntando cuál es la *"probabilidad condicional"* de *"apendicitis"* en los pacientes con *"dolor abdominal"*.

La probabilidad de "A" (*"dolor abdominal"*) era:

$$P(A)=\frac{n\,A}{N}=150/200=0{,}75\ (75\%)$$

La *"probabilidad condicional"* de *"apendicitis"* en los pacientes con *"dolor abdominal" es:*

$$P(B|A)=\frac{n\,AB}{n\,A}=73/150=0{,}49\ (49\%)$$

La probabilidad de tener *"apendicitis"* en la guardia [**P (B)**] es de 73/200 = 0,365 (36,5%), pero en los pacientes con *"dolor abdominal"* [**P(B|A)**] aumenta a 0,49 (49%)

Con el mismo razonamiento anterior llegamos a que la probabilidad de tener *"dolor abdominal"* y *"apendicitis"*, entonces:

$$P(\text{apendicitis}|\text{dolor abd.})=\frac{P(\text{dolor abd. y apendicitis})}{P(\text{dolor abd.})}$$

P (A y B) = P(B | A) × P (A) = 0,49 × 0,75 = 0,3675
P(dolor abd. y apendicitis) = P(apendicitis | dolor abd.) × P(dolor abd.)

Hemos utilizado dos caminos para estimar la probabilidad de tener *"dolor abdominal"* y *"apendicitis"* = P (A y B).

Podemos reemplazar el término P (A y B), observando que:

P(A y B) = P(B | A) × P(A) y también
P(A y B) = P(A | B) × P(B)

Dado que ambos lados derechos de estas dos últimas igualdades son iguales a la probabilidad del evento A y el evento B [P(A y B)], ellas son iguales entre sí, y por lo tanto:

P(A | B) × P(B) = P(B | A) × P(A)

P(dolor abd. | apen.) × P(apen.) =
P(apen. | dolor abd.) × P(dolor abd.)

En el caso que analizamos hasta ahora, A y B son dependientes entre sí, de manera que este cálculo condicional aporta elementos útiles. Podríamos extenderlo al razonamiento clínico, como haremos luego y en la clase de estudios diagnósticos, y estimar que si el paciente no tiene dolor abdominal la probabilidad de apendicitis es baja, dado que la probabilidad de dolor abdominal presentando un cuadro clínico de apendicitis es de 0,97 (97%) y otras diferencias clínicas.

Por supuesto, si **A** y **B** fueran independientes –entonces no podría haber la *probabilidad* de **A** bajo la *condición* (probabilidad condicional) que ocurra **B**–, la probabilidad de **A** dado **B** es nada más que igual a la probabilidad de **A** [**P(A)**] dado que la ocurrencia de **B** no influye en la ocurrencia de **A** , y el resultado final sería volver a la ya presentada posibilidad de que ocurra un evento conjunto (A y B) cuando ambas posibilidades son independientes y entonces la probabilidad de **A** y **B** se multiplica y resultaría: **P(A y B) = P(A) × P(B)**.

Resumiremos este concepto analizando en el mismo ejemplo anterior de 200 pacientes de la guardia la relación entre la probabilidad de apendicitis y la distribución por sexo masculino o femenino, que fue de 100 pacientes para cada uno.

Llamaremos "A" a la apendicitis y "B" al sexo femenino. Para facilitar el cálculo, el número de pacientes con apendicitis aumenta a 76. Presentaron sexo femenino y apendicitis 38 pacientes.

$$\text{P (A)} = 76/200 = 0{,}38$$
$$\text{P (B)} = 100/200 = 0{,}5$$
$$\text{P (A y B)} = 38/200 = 0{,}19$$

Ante la pregunta de cuál es la probabilidad de apendicitis en los pacientes de sexo femenino:

$$P(A|B) = \frac{nAB}{nB} = 38/100 = 0{,}38$$

vemos que la probabilidad de tener apendicitis en la población general es de 0,38 y en los pacientes de sexo femenino de 0,38. Esto indica que el sexo no condiciona la posibilidad de diagnóstico de apendicitis en la población de nuestra guardia.

Dado que son independientes, la probabilidad de "A y B" en conjunto, surge de multiplicar sus probabilidades.

$$\text{P (A y B)} = \text{P (A)} \times \text{P (B)} = 0{,}38 \times 0{,}5 = 0{,}19$$

LA REGLA DE BAYES Y LA PROBABILIDAD CONDICIONAL "REVERSA"

Hasta el advenimiento de los primeros *"matemáticos de la probabilidad"* se utilizaba un método de razonamiento lineal, que iba de las "causas" a los "efectos". En otros términos, del análisis clásico de la probabilidad que debido a una "causa" dada se produzca un "efecto" determinado pasaron al análisis de que la probabilidad de que un "efecto" observado se haya producido por una "causa" determinada.

El primer resultado exitoso de este proceso de "inversión" de la probabilidad se debe al ministro prebisteriano Thomas Bayes, que escribió con respecto a la teoría de la probabilidad *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*, publicado en forma póstuma en 1764 por su amigo el reverendo Richard Price, en el que figura el famoso y bellísimo teorema sobre la "probabilidad de las causas".

A veces conocemos una probabilidad condicional, como en el ejemplo relatado podemos conocer la probabilidad de tener "dolor abdominal" *dada* la presencia de "apendicitis" [P(dolor abd.|apen. o P(A|B)]; esto resulta relativamente fácil consultando los libros de medicina interna. Y también conocemos por estudios epidemiológicos cuál es la probabilidad de "apendicitis" en la población [P(apen.) o P(B)], o la probabilidad de "dolor abdominal" [P(dolor abd.) o P(A)].

Pero lo que en realidad nos importa es conocer cuál es la probabilidad *condicional* de "apendicitis" *dada* la presencia de "dolor abdominal" [P(apen.|dolor abd.) o P(B|A)]. Para conocer la posibilidad diagnóstica aumentada debido a un síntoma (o signo, dato de laboratorio o prueba específica), utilizamos en realidad la probabilidad "reversa" de lo que conocemos [en esta situación P(dolor abd.|apen. o P(A|B)], por medio del teorema desarrollado por el reverendo Thomas Bayes en 1763.

Volviendo a la igualdad referida:

$$P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

$$\text{P(dolor abd.}|\text{apen.)} \times \text{P(apen.)} =$$
$$\text{P(apen.}|\text{dolor abd.)} \times \text{P(dolor abd.)}$$

Despejando de la igualdad el término:

$$[\text{P(apen.}|\text{dolor abd.) o P(B}|\text{A)}]$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \times P(B)}{P(A)}$$

$$\text{P(apen.}|\text{dolor abd.)} = \frac{\text{P(dolor abd.}|\text{apen.)} \times \text{P(apen.)}}{\text{P(dolor abd.)}}$$

En la regla de Bayes, la probabilidad *condicional* de "apendicitis" *dada* la presencia de "dolor abdominal" [P(apen.|dolor abd.) o P(B|A)], se denomina ***"probabilidad posterior a la prueba"***. Y la probabilidad de "apendicitis" en la población [P(apen.) o P(B)] se llama ***"probabilidad previa a la prueba"***.

En realidad, en la aplicación de la regla de Bayes no utilizamos la probabilidad de "dolor abdominal" [P(dolor abd.) o P(A)] porque es muy difícil de conocer, y en su lugar colocamos la población que tiene la probabilidad de "dolor abdominal" dada la presencia de "apendicitis" [P(dolor abd.|apen.) × P(apen.) o P(A|B) × P(B)] sumado al resto de la población que tiene "dolor abdominal" dada la ausencia de "apendicitis" [P(dolor abd.|No apen.) × P(No apen.) o P(A|No B) × P(No B)]. Entonces P(A) o P(dolor abd.) quedaría:

$$P(A) = P(A|B) \times P(B) + P(A|\text{No } B) \times P(\text{No } B)$$

Reemplazando P(A), la fórmula final del teorema de Bayes quedaría:

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)\times P(B)}{P(A|B)\times P(B)+P(A|\text{No }B)\times P(\text{No }B)}$$

$$P(\text{apen.}|\text{dolor abd.}) = \frac{P(\text{dolor abd.}|\text{apen.})\times P(\text{apen.})}{P(\text{dolor abd.}|\text{apen.})\times P(\text{apen.}) + P(\text{dolor abd.}|\text{No apen.} \times P(\text{No apen.})}$$

Veamos cómo trabaja el "teorema de Bayes" con los números de un estudio real.

En el estudio denominado *Northwick Park Heart Study* sobre "enfermedad coronaria" (EC), se obtuvieron las siguientes muestras probabilísticas de "fumadores" (F) y "no fumadores" (no F).

P(F | EC) = 0,53 **P(EC) = 0,08**

P(F | no EC) = 0,38 **P(no EC) = 0,92**

¿Cuál es la probabilidad de EC (enfermedad coronaria) en un F (fumador); o sea **P(EC/F)** [P(enf. Cor. | fumador)]?

La respuesta se obtiene utilizando la *"probabilidad condicional revertida"* del teorema de Bayes.

$$P(EC/F)=\frac{P(F|EC)\times P(EC)}{P(F|EC)\times P(EC)+P(F|\text{no }EC)\times P(\text{no }EC)}$$

$$P(EC/F)=\frac{(0{,}53)\times(0{,}08)}{(0{,}53)\times(0{,}08)+(0{,}38)\times(0{,}92)}=\frac{0{,}042}{0{,}392}=0{,}11$$

La *"probabilidad"* de enfermedad coronaria [P(EC)] antes de saber si el paciente es fumador –la llamada *probabilidad preprueba–* era de 0,08 (8%), aumentando a 0,11 (11%) luego de conocer la *"probabilidad condicional"* dado que el paciente era en realidad un fumador [P(EC | F)] – la ahora llamada *probabilidad posprueba–* .

Otra pregunta que podríamos formularnos es: ¿Cuál es la probabilidad de EC (enfermedad coronaria) en un no F (no fumador); o sea **P(EC/no F)** [P(enf. Cor. | no fumador)]?

La respuesta también se obtiene utilizando la *"probabilidad condicional revertida"* del teorema de Bayes.

P(no F | EC) = 1 - P(F | EC) = 1 - 0,53 = 0,47
P(EC) = 0,08
P(no F | no EC) = 1 - P(F | no EC) = 1 - 0,38 = 0,62
P(no EC) = 0,92

Si ahora arreglamos la fórmula de Bayes para los no fumadores (no F), quedaría de la siguiente manera:

$$P(EC/\text{no }F)=\frac{P(\text{no }F|EC)\times P(EC)}{P(\text{no }F|EC)\times P(EC)+P(\text{no }F|\text{no }EC)\times P(\text{no }EC)}$$

$$P(EC/\text{no }F)=\frac{(0{,}47)\times(0{,}08)}{(0{,}47)\times(0{,}08)+(0{,}62)\times(0{,}92)}=\frac{0{,}038}{0{,}608}=0{,}06$$

La *"probabilidad"* de enfermedad coronaria [P(EC)] antes de saber si el paciente es fumador –la llamada *probabilidad preprueba–* era de 0,08 (8%), que disminuye a 0,06 (6%) luego de conocer la *"probabilidad condicional"* dado que el paciente no era en realidad un fumador [P(EC | no F)] –la ahora llamada *probabilidad posprueba–*.

O sea, si desconociendo la *"condición"* de ser o no fumador la probabilidad previa de enfermedad coronaria es igual al 8% [P(EC) = 0,08)], después de conocer la *"probabilidad condicional"* de ser fumador aumenta al 11% [P(EC | F) = 0,11], o luego de saber la *"probabilidad condicional"* de ser no fumador disminuye al 6% [P(EC | no F) = 0,06].

Relaciones entre el "viejo" teorema de Bayes y los índices más "modernos" de sensibilidad, especificidad y valores predictivos

Otra forma matemáticamente correcta de escribir la fórmula de Bayes, sacando del quebrado la probabilidad condicional de ser fumador dado de que tenga enfermedad coronaria [P(F | EC) = 0,53], es:

$$P(EC/F)=P(F|EC)\times\frac{P(EC)}{P(F|EC)\times P(EC)+P(F|\text{ no }EC)\times P(\text{no }EC)}$$

Ahora bien, la larga fórmula que está colocada en el denominador [P(F | EC) × P(EC) + P(F | no EC) × P(no EC)] solamente expresa la "probabilidad" de ser fumador en *toda* la población [P(F | EC) x P(EC) + P(F | no EC) × P(no EC) = 0,392 = 39,2%], o sea **P(F)**. El resultado del 39,2% es intermedio, pero mucho más cercano al 38% de los fumadores que no presentan enfermedad coronaria [P(F | no EC) = 0,38] porque son el 92% de la población [P(no EC) = 0,92], que del 53% de los fumadores que tienen enfermedad coronaria [P(F | EC) = 0,53], porque sólo son el restante 8% [P(EC) = 0,08].

Así que la fórmula simplificada sería:

$$P(EC/F)=P(F|EC)\times\frac{P(EC)}{P(F)}$$

$$P(EC/F)=0{,}53\times\frac{0{,}08}{0{,}392}=0{,}11$$

Como esta fórmula simplificada es solamente un pasaje ajustado a la lógica matemática, el resultado es idéntico al anterior con la fórmula desarrollada. Por lo tanto, también se podría escribir, invirtiendo los términos del numerador:

$$P(EC|F)=P(EC)\times\frac{P(F|EC)}{P(F)}$$

Ahora podemos empezar a hablar de "sensibilidad", "especificidad" o "valores predictivos".

Ya discutimos que la probabilidad de enfermedad coronaria en la población [P(EC)] es la así llamada *"probabilidad preprueba"*, y la probabilidad de enfermedad coronaria dado que el paciente es un fumador [P(EC|F)] es el resultado calculado o la *"probabilidad posprueba"*.

Pero ahora deberíamos decir que al conocer la probabilidad de que los pacientes con enfermedad coronaria fumen [P(F|EC)], el cigarrillo se convierte así en el valor o "verdadero positivo" (VP) para diagnosticar la "enfermedad coronaria" (EC), esto en realidad es lo que conocemos como SENSIBILIDAD (S) de un síntoma, signo o prueba para diagnosticar (enfermedad coronaria en nuestro ejemplo). De esta forma SENSIBILIDAD = VP / EC = F / EC = P(F|EC).

A su vez la probabilidad de fumar cigarrillos de toda la población [P(F)] es muy parecida –debido a la alta posibilidad de la población de pacientes sin enfermedad a los fumadores que no presentan enfermedad– coronaria [P(F|no EC)]. Esto en realidad podemos escribirlo como 1 – ESPECIFICIDAD (E) (esto que resulta el complemento de la "especificidad" se llama *"falsa alarma"*), porque si especificidad (E) es igual a "verdaderos negativos" (VN) sobre "sanos" no coronarios (E = VN / no EC = no F / no EC), 1 – ESPECIFICIDAD = 1 – E = 1 – VN / no EC = FP / no EC = F / no EC = P(F|no EC).

Por lo tanto, si:

P(F|EC) = **SENSIBILIDAD (S)** y

P(F|no EC) = **1 – ESPECIFICIDAD (E)**

$$\frac{P(EC|F)}{P(F|\text{no } EC)} = \frac{\text{SENSIBILIDAD}}{1 - \text{ESPECIFICIDAD}}$$

Esta relación se la llama *likelihood ratio*.

$$\textit{Likelihood ratio} = \frac{\text{SENSIBILIDAD}}{1 - \text{ESPECIFICIDAD}}$$

Utilizar el *likelihood ratio* en el teorema de Bayes, es utilizar su forma *"odds"*. Se llama de esa manera porque si bien la SENSIBILIDAD y la ESPECIFICIDAD son probabilidades (razones donde se coloca en el numerador el número de "eventos" y en el denominador el número del "total de la población"), cuando se utiliza el *"likelihood ratio"* el resultado es un *"odds"* (razones donde se coloca en el numerador el número de los que tienen "eventos" y en el denominador el número de los que no tienen el evento, o el llamado "no eventos").

Veamos cómo se asemejan matemáticamente:

$$\textit{Odds} = \frac{\text{Probabilidad}}{1 - \text{Probabilidad}} = \frac{\text{Sensibilidad}}{1 - \text{Especificidad}}$$

Para que funcione la forma *"odds"* del teorema de Bayes, las *probabilidades "preprueba"* [P(EC)] y *"posprueba"* [P(EC|F)], se deben pasar a expresiones matemáticas de *"odds"*.

Por lo tanto, la "probabilidad preprueba" pasa a "*odds* preprueba":

$$\textit{Odds}\text{ preprueba} = \frac{\text{Probabilidad}}{1 - \text{Probabilidad}} = \frac{P(EC)}{1 - P(EC)}$$

Y la "probabilidad posprueba" pasa a "*odds* posprueba":

$$\textit{Odds}\text{ posprueba} = \frac{\text{Probabilidad}}{1 - \text{Probabilidad}} = \frac{P(EC|F)}{1 - P(EC|F)}$$

Quedando la fórmula final de la forma de *"odds"* del teorema de Bayes:

$$\textit{Odds}\text{ posprueba} = \textit{Odds}\text{ preprueba} \times \textit{Likelihood ratio}$$

$$\textit{Odds}\text{ posprueba} = \textit{Odds}\text{ preprueba} \times \frac{\text{Sensibilidad}}{1 - \text{Especificidad}}$$

Como en medicina conocemos muchas de las "sensibilidades" y "especificidades" de los distintos síntomas clínicos, maniobras semiológicas, análisis de laboratorio y pruebas instrumentales, y aun existen libros publicados que nos dan esta información, por lo tanto podemos conocer el *"valor multiplicador"* de los diferentes *"likelihood ratio"*. Conociendo el *"odds previo"* (*odds* previo = probabilidad previa / 1 – probabilidad previa), nos permite calcular, hasta mentalmente, el "*odds* posterior" (*odds* posterior = probabilidad posterior / 1 – probabilidad posterior).

Finalmente solamente faltaría pasar otra vez el resultado final expresado como "*odds* posprueba" a "probabilidad posprueba", utilizando la conocida fórmula:

$$\text{Probabilidad posprueba} = \frac{\textit{Odds}\text{ posprueba}}{1 + \textit{Odds}\text{ posprueba}}$$

Si se quisiera utilizar esta fórmula en *odds* para calcular mentalmente sin lápiz ni papel, ni calculadoras o computadoras, deberíamos utilizar una multiplicación, que es un cálculo algo más complejo que una simple suma mental.

Es bien conocido que en una multiplicación de "logaritmo" los términos se deben sumar y el resultado final se revierte a su forma original utilizando el "antilogaritmo". Algunos estadígrafos transformaron el *"likelihood ratio"* a su "logaritmo natural" (ln) y al resultado lo llamaron *"weight"* (peso); ya que sumado al ln del "*odds* preprueba" da por resultado final el ln "*odds* posprueba". De manera que:

$$\textit{Weight}\ (\textit{peso}) = \ln \textit{likelihood ratio} = \ln \frac{\text{SENSIBILIDAD}}{1 - \text{ESPECIFICIDAD}}$$

Y por lo tanto, la fórmula *"odds"* del teorema de Bayes, elevados sus términos al logaritmo natural (ln) y convertido el *"likelihood ratio"* en *"weight"* (peso), queda así:

$$\textbf{ln } \textbf{\textit{odds}} \textbf{ posprueba} = \textbf{ln } \textbf{\textit{odds}} \textbf{ preprueba} \times \textbf{ln} = \frac{\textbf{SENSIBILIDAD}}{1 - \textbf{ESPECIFICIDAD}}$$

Aplicación práctica del teorema de Bayes en la evaluación diagnóstica (y pronóstica)

Parece que al final logramos complicar, aún más, todo. Sin embargo, llegamos a este punto para poder simplificar extraordinariamente el cálculo de la probabilidad posterior luego de tener una información relevante de algún dato o probabilidad previa y conociendo el *likelihood ratio* de la información y la probabilidad que teníamos antes de dicha información.

Cuando se aplica un método determinado para establecer un diagnóstico, conociendo el *"likelihood ratio"* positivo o negativo del método y la prevalencia conocida de la enfermedad previa a la prueba, podemos calcular, como hemos visto, la prevalencia esperada posterior a la realización de la prueba si el *test* es positivo o negativo, lo que se discute extensamente en la clase sobre métodos diagnósticos que acompaña este módulo. Este análisis exige una sola multiplicación y es relativamente sencillo. Sin embargo, cuando sumamos diferentes pruebas, métodos y criterios en el mismo paciente para contribuir al diagnóstico final, lo que se asemeja mucho a la práctica clínica (en el caso anterior de apendicitis, el dolor abdominal, la fiebre y la leucocitosis contribuyen en forma independiente al diagnóstico). La conversión del *"likelihood ratio"* de cada método a logaritmo trasforma la información en pesos (*weights*), que pueden sumarse y luego recalcular, de acuerdo con el hallazgo, la probabilidad de un diagnóstico o la ocurrencia de un evento. En el caso de apendicitis, por ejemplo, podríamos estimar la probabilidad del diagnóstico si el paciente tiene dolor abdominal (utilizando el *likelihood ratio* positivo o el peso), pero si carece de los criterios fiebre y leucocitosis (también utilizando el *likelihood ratio* negativo o peso), y considerándolos todos "sumar" los "pesos" de cada criterio diagnóstico.

Para facilitar el cálculo y permitir una mejor comprensión conceptual, desarrollamos una tabla. En ella hicimos algo bastante simple, con sólo una calculadora científica convertimos todas las probabilidades desde la de 0,01 a la de 0,99 (1% a 99%) en *odds* (utilizando la fórmula *odds* = probabilidad / 1 – probabilidad) colocando esos *odds* que en realidad son también, como dijimos, *likelihood ratios* entre paréntesis en la tabla que nos permite convertir probabilidades en *odds* sin la necesidad de ningún cálculo. Además trasformamos a su logaritmo natural (ln) cada *odds* calculado y *lo* colocamos encima de cada *odds* o *likelihood ratio* de la tabla. De manera tal que cuando tenemos una probabilidad, previa o posterior, podemos pasarla –usando la tabla– a *odds* o a su peso (*weight*), y al *likelihood ratio* de cualquier prueba conocida a su peso (*weight*). Esto también nos permite seguir el camino inverso y pasar de *odds* o pesos (*weight*) a probabilidades.

Ahora ya tenemos una simple y pequeña tabla, que nos permite hacer todos los pasos sin necesidad de hacer ningún cálculo y sólo utilizando la cabeza para sumar números pequeños.

Si llegaron hasta aquí, en este punto están por entrar en la actividad lúdica del uso del "teorema de Bayes". Primero les muestro la tan conversada tabla (¿de salvación?).

Pueden observar que una probabilidad del 50% (0,5) muestra entre paréntesis un *odds* (*likelihood ratio*) de 1,0 (*odds* = 0,5 / 1 – 0,5 = 1,0) y un peso (*weight*) de 0 (ln *odds* = ln 1,0 = 0). Esto significa que cuando se tira muchas veces una moneda, por azar, la probabilidad de que salga cara sucede la mitad de las veces o el 50% (probabilidad = 0,5), la posibilidad que una vez salga cara y otra vez salga ceca, o sea el *odds* de la posibilidad de que salga cara es de 1,0 (*odds* cara = cara / ceca = 1,0), y el peso que nos brinda esa información es igual a 0 (ln *odds* = ln 1,0 = 0); ya que la posibilidad de información esta determinada por el azar.

O sea que, cuando tengamos dos pruebas para diagnosticar la misma enfermedad, y las características de la prueba "A" muestra una sensibilidad = 0,35 y especificidad = 0,65 y en cambio otra prueba "B" tiene una sensibilidad = 0,70 y una especificidad = 0,30. ¿Cuál de estas dos pruebas considera usted adecuada y utilizaría en su paciente para diagnosticar la enfermedad "X"?

Si pensó un rato y aplicó el concepto de *likelihood ratio* que le explicamos hasta acá; se dará cuenta:

1. Las dos pruebas son de igual eficacia para diagnosticar la enfermedad "X".
2. Y además la eficacia para realizar el diagnóstico de la enfermedad "X" de los dos pruebas es completamente nula.

Vayamos por pasos: calculemos primero el "*likelihood ratio*" (LR) de las dos pruebas, después comparémoslas para conocer su eficacia y luego conozcamos su poder para aumentar la información que teníamos de este paciente.

1. $\text{Prueba “A”} = \text{LR} = \frac{\text{S}}{\text{1-E}} = \frac{0{,}35}{1\text{-}0{,}65} = 1{,}0$

2. $\text{Prueba “A”} = \text{LR} = \frac{\text{S}}{\text{1-E}} = \frac{0{,}70}{1\text{-}1{,}30} = 1{,}0$

O sea, ambas pruebas tienen el mismo LR = 1,0; por lo tanto, ambas pruebas tienen la misma eficacia para el diagnóstico.

Pero también, ambas no tienen ninguna información, de lo que resulta inútil su utilización, porque

TABLA *(explicación en el texto)*

+5,0 (150)	+5,3 (200)	+5,7 (300)	+6,0 (400)	+6,2 (500)	+6,6 (750)	+6,9 (1.000)

%	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
90	+2,2 (9,0)	+2,3 (10,1)	+2,4 (11,5)	+2,6 (13,3)	+2,8 (15,7)	+2,9 (19,0)	+3,2 (24,0)	+3,5 (32,3)	+3,9 (49,0)	+4,6 (99,0)
80	+1,4 (4,0)	+1,5 (4,3)	+1,5 (4,6)	+1,6 (4,9)	+1,7 (5,2)	+1,7 (5,7)	+1,8 (6,1)	+1,9 (6,7)	+2,0 (7,3)	+2,1 (8,1)
70	+0,8 (2,3)	+0,9 (2,4)	+0,9 (2,6)	+1,0 (2,7)	+1,0 (2,8)	+1,1 (3,0)	+1,2 (3,2)	+1,2 (3,3)	+1,3 (3,5)	+1,3 (3,8)
60	+0,4 (1,5)	+0,4 (1,6)	+0,5 (1,6)	+0,5 (1,7)	+0,6 (1,8)	+0,6 (1,9)	+0,7 (1,9)	+0,7 (2,0)	+0,8 (2,1)	+0,8 (2,2)
50	0 (1,0)	0 (1,0)	+0,1 (1,1)	+0,1 (1,1)	+0,2 (1,2)	+0,2 (1,2)	+0,2 (1,3)	+0,3 (1,3)	+0,3 (1,4)	+0,4 (1,4)
40	-0,4 (0,67)	-0,4 (0,69)	-0,3 (0,72)	-0,3 (0,75)	-0,2 (0,79)	-0,2 (0,82)	-0,2 (0,85)	-0,1 (0,89)	-0,1 (0,92)	0 (0,96)
30	-0,8 (0,43)	-0,8 (0,45)	-0,8 (0,47)	-0,7 (0,49)	-0,7 (0,52)	-0,6 (0,54)	-0,6 (0,56)	-0,5 (0,59)	-0,5 (0,61)	-0,4 (0,64)
20	-1,4 (0,25)	-1,3 (0,27)	-1,3 (0,28)	-1,2 (0,30)	-1,2 (0,32)	-1,1 (0,33)	-1,1 (0,35)	-1,0 (0,37)	-1,0 (0,39)	-0,9 (0,41)
10	-2,2 (0,11)	-2,1 (0,12)	-2,0 (0,14)	-1,9 (0,15)	-1,8 (0,16)	-1,7 (0,18)	-1,7 (0,19)	-1,6 (0,20)	-1,5 (0,22)	-1,5 (0,23)
0		-4,6 (0,01)	-3,9 (0,02)	-3,5 (0,03)	-3,2 (0,04)	-2,9 (0,05)	-2,8 (0,06)	-2,6 (0,08)	-2,4 (0,09)	-2,3 (0,10)

tanto cuando dan positivo o negativo tienen un LR = 1,0 y cualquier *odds* preprueba multiplicado por 1,0 dará por resultado un *odds* posprueba exactamente igual. El peso (*weight*) de la información es 0 (ln LR 1,0 = 0), y cualquier ln *odds* preprueba si se suma 0 dará por resultado un ln *odds* posprueba exactamente igual. Por lo tanto, debemos perder nuestra confianza virginal y reconocer que hay pruebas en medicina que no brindan ninguna información. Por ejemplo, durante años los médicos que realizaban electrocardiogramas de esfuerzo para el diagnóstico de la enfermedad coronaria, discutieron si debería tomarse como criterio diagnóstico un infradesnivel del ST > 1mm o > 0,5 mm; hoy sabemos que cuando un pacientes presenta una desviación del ST > 0,5 mm y ≤ 1 mm el LR es igual a 1,0, o sea que no tenemos ninguna información. Si el ST es ≤ 0,5 mm de desnivel, la probabilidad de enfermedad coronaria disminuye porque el LR es < 1,0 y cuando el desnivel negativo del ST es > 1 mm, la probabilidad de enfermedad coronaria aumenta, porque el LR es > 1,0.

Vayamos ahora, con nuestro bagaje teórico a cuestas, al prometido juego lúdico con el teorema de Bayes. Antes debemos colocar en la tabla que sigue los LR y *weights* (pesos) de las variables demográficas, síntomas del interrogatorio y las diferentes pruebas funcionales, que nos permiten evaluar la probabilidad de padecer enfermedad coronaria.

Lo primero que deberíamos "ver" en la tabla mencionada, es que la presencia de un interrogatorio de "angina de pecho típica" tiene el más alto *likelihood ratio* de todos, el LR es de 200 (con un peso de +5,2); muy por encima de una "prueba de talio de esfuerzo" anormal donde el LR es de 5,7 (con un peso de +1,7).

Esto hace valorar a los clínicos cuidadosos cuando interrogan exhaustivamente a los pacientes para reconocer el diagnóstico correcto del tipo de dolor torácico; ya que este signo semiológico es, con mucho, la prueba más importante para arribar al diagnóstico de enfermedad coronaria. Y no confían ciegamente en las pruebas funcionales como lo hacen los médicos apresurados.

Escenifiquemos una situación común para un médico en su consultorio. El paciente traspone la puerta, se observa antes de que se siente que es un hombre de pelo cano con aspecto de tener alrededor de 55 años. ¿Cómo sopesamos en ese primer momento la posibilidad de que padezca enfermedad coronaria?

Vayamos a la tabla, ahí observamos que la prevalencia previa (sin conocer su género ni edad) de enfermedad coronaria tiene un peso de –3,2 (LR 0,04). Recordemos el peso de –3,2 y súmesele el peso +0,4 que corresponde a un LR de 1,5 por ser un hombre de entre 50 y 59 años (véase tabla), mentalmente sabemos que la suma da por resultado un peso (*weight*) de –2,8.

Ahora buscamos el peso –2,8 en la tabla de conversión *ad hoc* [como el borde derecho marca 0 (cero) y el superior 6] y encontramos que la probabilidad de enfermedad coronaria de este paciente, antes de que se siente, es del 6%.

Ahora el paciente nos relata que todas las mañanas al ir al tomar el colectivo para su trabajo a una parada distante 6 cuadras de su casa, al transcurrir la

EVALUACIÓN DE LA ENFERMEDAD CORONARIA

PRUEBA	(*LIKELIHOOD RATIO*)	WEIGHT
PREVALENCIA	(0,04)	-3,2
VARONES (EDAD)		
30-39	(0,28)	-1,3
40-49	(0,82)	-0,2
50-59	(1,50)	+0,4
60-69	(2,00)	+0,7
MUJERES (EDAD)		
30-39	(0,04)	-3,1
40-49	(0,05)	-1,9
50-59	(0,50)	-0,7
60-69	(1,20)	+0,2
DOLOR TORÁCICO		
Ninguno	(1,0)	0
No anginoso	(4,5)	+1,5
Angina atípica	(24)	+3,2
Angina típica	(200)	+5,2
PRUEBA ERGOMÉTRICA (ECG)		
Normal	(0,4)	-0,9
Anormal	(4,6)	+1,5
VENTRIC. ISOTOP. (anormal. reg.)		
Normal	(0,4)	-0,9
Anormal	(3,5)	+1,3
PRUEBA DE TALIO		
Normal	(0,19)	-1,7
Anormal	(5,70)	+1,7

cuarta cuadra presenta una sensación de apretón en el medio del pecho (señala la zona apoyando la mano abierta) que aumenta progresivamente y se le propaga al cuello y a ambos brazos con sensación de peso, y además manifiesta que cuando llega a la parada y se queda quieto, esperando el colectivo, comienza a ceder para desaparecer totalmente en 2 a 3 minutos. Esa narración espontánea de la molestia del paciente es tan clara y definida, que nos permite afirmar, sin ninguna duda, que su mecanismo es una "angina de pecho típica". Ya comentamos que ésta tiene un peso de +5,2 (véase tabla "evaluación de la enfermedad coronaria), sumado al –2,8 previo nos da un peso de +2,4 (es fácil calcular mentalmente 5,2 – 2,8 = 2,4).

Volvamos a la "tabla de conversión", un peso (*weight*) de +2,4 indica (borde izquierdo decena de los "90" y borde superior unidad de "2") un 92% de probabilidad de presentar una lesión >70% de por lo menos uno o más vasos coronarios. O sea que, con esta observación tan bien narrada por el paciente, tenemos una probabilidad muy alta de que presente enfermedad coronaria orgánica (debida a aterosclerosis coronaria).

Como nuestro médico no confía en el valor del interrogatorio, le pide una prueba de esfuerzo con talio, para confirmar el diagnóstico.

Para su sorpresa, cuando el paciente vuelve a la consulta con la prueba realizada, su resultado informa: "Prueba de esfuerzo adecuada porque llegó a 170 latidos por minutos, más allá de la frecuencia cardíaca submáxima, el resultado fue negativo sin observarse isquemia".

¿Qué hace nuestro médico? ¿Acepta el resultado y le dice que no tiene enfermedad coronaria? En realidad, como él sabía aplicar el teorema de Bayes y conocía que antes de la prueba con talio el paciente tenía una probabilidad del 92% (LR = 11,5) con un peso de +2,4 (véase tabla de conversión), al buscar en la tabla de "evaluación de la enfermedad coronaria" se informa que una prueba de talio normal disminuye la probabilidad con un peso –1,7, al sumarlo todavía resulta un peso positivo de +0,7.

Volviendo a la tabla de conversión, el peso +0,7 muestra una probabilidad de tener enfermedad coronaria del 67%. O sea, con la alta posibilidad previa, debido a que este hombre presentaba una angina de pecho típica, a pesar de que una prueba sofisticada es negativa, la posibilidad diagnóstica sigue siendo suficientemente alta como para pensar todavía en el diagnóstico de enfermedad coronaria en este paciente.

A su vez, si hubiera resultado positiva habría que sumarle un peso de +1,7, que llevaría el peso final a +4,1 con una probabilidad del 98% (tabla de conversión).

Por lo tanto, cuando el interrogatorio nos lleva a una probabilidad razonablemente alta de enfermedad coronaria –92% en este paciente–, tanto un resultado negativo –67%– como positivo –98%– no nos brinda una información útil; porque no nos permite descartar ni aumentar nuestro grado ya alto de certidumbre.

Yéndonos al otro extremo, entra una mujer de algo más de 30 años. La probabilidad de enfermedad coronaria es de bastante menos del 1% (prevalencia –3,2 sumado a –3,1 por la edad y el sexo, resultado peso de –6,3; en la tabla 1% de probabilidad tiene un peso de –4,6).

La paciente se disgustó con su esposo y relata puntadas en la zona pectoral izquierda de duración instantánea; al médico no le quedan dudas de que es un dolor torácico no coronario (según tabla peso +1,5). Sumando (-6,3) + (+1,5) = –4,8, y buscando en la tabla de conversión, la probabilidad sigue siendo < 1%.

Como está muy asustada porque pueda padecer una enfermedad del corazón, el médico acuerda realizarle una prueba ergométrica convencional. Para su desgracia regresa con una prueba que se informa positiva, por presentar un desnivel negativo del ST >1 mm, que refuerza la idea de la paciente de tener una enfermedad cardíaca.

¿Cómo utiliza nuestro médico el teorema de Bayes? Si la probabilidad previa era de un peso de –4,8 y la prueba ergométrica positiva tiene un peso de +1,5, finalmente resulta un peso de –3,3 [-4,8 (+) +1,5 = –3,3]. Este peso final deja la probabilidad de enfermedad coronaria en –< 4%– (véase tabla de conversión).

Tampoco los estudios complementarios funcionales para el diagnóstico de enfermedad coronaria nos informan nada cuando la probabilidad previa es < 1%, ya que una prueba positiva aumenta muy poco la probabilidad –< 4%–, y no permite inferir enfermedad coronaria; y a su vez una prueba negativa nos sigue diciendo lo que ya sabemos, la enfermedad es altamente improbable.

¿En qué pacientes debemos seguir incrementando la probabilidad diagnóstica con síntomas o pruebas?

Imaginemos un paciente de 45 años que se presenta con una "angina atípica", porque le faltan algunas de las características que permiten el diagnóstico. En esa situación existe un 45% de posibilidades de enfermedad coronaria (prevalencia –3,2 se neutraliza con "angina atípica" que es +3,2, y queda el peso final de –0,2 que corresponde al sexo masculino de 45 años, que se convierte en 45%), que significa un resultado tan aleatorio como tirar una moneda. Este ejemplo es extrapolable a todas las condiciones en que tenemos dudas fundadas en aceptar un diagnóstico de enfermedad coronaria.

En esta situación si efectuamos una prueba funcional con un marcador de talio, si la prueba es positiva con un peso –como dijimos– de +1,7, la probabilidad se va al 82% [+1,7 (–) –0,2 = +1,5, probabilidad 82%] y si es negativa [peso –1,7) disminuye al 13% (–0,2 (–) –1,7 = –1,9, probabilidad 13%).

Como queda bien en claro con este ejemplo, en las posibilidades intermedias –aquellas en las que tenemos incertidumbre médica en el diagnóstico–, una prueba positiva indica una probabilidad razonable y práctica de pensar en la enfermedad y por el contrario una prueba negativa indica que podemos descartarlo con suficiente confianza.

Ahora ya estamos en condiciones teóricas y prácticas para jugar solos el juego pergeñado por el reverendo Thomas Bayes; manos a la obra, calculen las distintas combinaciones que deseen de género, edad, síntomas y pruebas funcionales.

Limitaciones y críticas al bayesianismo desde el punto de vista epistemológico

El "teorema" de Bayes, como todo teorema, se puede deducir de las "premisas"; en este caso en particular, de las premisas que constituyen el cálculo de probabilidades, como hemos tratado de demostrar. En este sentido, el teorema es en sí mismo incontestable.

Pero una de las premisas que se aceptan es que podemos estimar la probabilidad involucrada, lo que se llama "probabilidad previa a la prueba".

¿Cómo calcularla? A un lado tenemos a los denominados "bayesianos objetivos". Según ellos, las probabilidades son las que los agentes racionales *deberían* suscribir en vista de la situación objetiva.

Este esquema supone que, en medicina, podemos asignar probabilidades previas objetivas a las hipótesis. Para ello deberíamos hacer una lista de *todas las hipótesis posibles* en un dominio determinado y –como mínimo– distribuir las probabilidades entre ellas asignándoles la misma probabilidad a cada una según el principio de indiferencia. Pero, ¿cómo podríamos crear dicha lista? Podemos fácilmente pensar que el número de hipótesis posibles en un dominio es infinita. Por ejemplo, en nuestro caso estamos suponiendo la probabilidad previa de que el dolor abdominal se deba a "apendicitis", ¿pero como lo calculamos?, ¿cuántas posibilidades consideramos?, ¿tres? (apendicitis, fractura, hernia), 10, 100, 10.000; en realidad, para utilizar el principio de indiferencia y adjudicarle un porcentaje de probabilidad previa debemos conocer el número de todas las situaciones posibles que presentan dolor abdominal. Si el número de posibilidades es infinito, la probabilidad previa sería cero en todas y el juego bayesiano no puede siquiera comenzar. Si todas las posibles hipótesis tienen probabilidad cero, entonces Karl Popper tenía razón y no se puede estimar la probabilidad previa y toda hipótesis debe enfrentarse sin ningún preconcepto.

Sin embargo, aun el científico más neutro tiene una idea previa sobre el efecto que busca, y es una característica humana que tengamos opiniones explícitas o implícitas sobre todas las cosas que suceden a nuestro alrededor. Para soslayar este problema lógicamente insuperable del bayesianismo objetivo, podemos inclinarnos por la corriente del llamado "bayesianismo subjetivo", que afirma que las probabilidades que maneja el teorema de Bayes representan *grados distintos de creencias*. De esta manera, escapan a las constricciones de Popper de que la probabilidad de todas las hipótesis universales debe ser cero.

Howson y Urbach tienen una respuesta a la acusación de que una creencia subjetiva es un punto de partida decepcionante, y según lo escrito por Alan F. Chalmers "... insisten que la teoría bayesiana constituye una *teoría objetiva* de la inferencia científica. Es decir, si tenemos un conjunto de probabilidades previas y alguna prueba nueva, el teorema de Bayes dicta de modo objetivo cuáles deben ser las probabilidades nuevas, las posteriores, vista dicha prueba. No hay ninguna diferencia al respecto entre el bayesianismo y la lógica deductiva, puesto que la lógica tampoco tiene nada que decir acerca del origen de las proposiciones que constituyen las premisas de una deducción; dice simplemente qué sigue de dichas proposiciones una vez que han sido dadas".

Si de la premisa de la probabilidad previa que debemos aceptar como un grado de creencia vamos a la naturaleza de la prueba aceptándola como "verdadera", para convertir probabilidades previas en probabilidades posteriores, sin pedir de que sea apropiada, vayamos a lo que escribieron Howson y Urbach de acuerdo a su esquema:

"La teoría bayesiana que proponemos es una teoría de inferencia a partir de los datos. No decimos nada sobre si es correcto aceptar los datos, ni siquiera cuando la convicción es absoluta. Podría no ser así, y sería una locura concederle esa confianza. La teoría de apoyo bayesiano es una teoría sobre cómo el dar por verdaderos unos enunciados de prueba afecta la creencia en algunas hipótesis. Cómo se llega a aceptar la verdad de las pruebas y si se está en lo correcto al aceptarla como verdaderas, son asuntos irrelevantes desde el punto de vista de la teoría."

Esta conclusión es decepcionante e inaceptable, porque un científico en acción debe necesariamente buscar información sobre la naturaleza del experimento que proporcionó la prueba, cómo se realizaron las mediciones y como se estimaron sus errores, y el resto de precauciones que estuvimos desarrollando en este curso.

Para finalizar, reconociendo los límites de la teoría bayesiana, podemos utilizar nuevamente a Chalmers:

"Pero, ¿cómo se puede llamar a lo que queda de su posición una teoría del método científico? Todo lo que queda es un teorema del cálculo de probabilidades. Supongamos que concedemos a Howson y Urbach que este teorema, tal y como ellos lo interpretan, es en verdad un teorema de rango igual a la lógica deductiva. Esta concesión sirve para resaltar lo limitado de su postura. Todo lo que su teoría del método científico dice acerca de la ciencia equivale a la observación de que la ciencia se adhiere a los dictados de la lógica deductiva. La gran mayoría, al menos, de los filósofos de la ciencia no tendrían ningún problema en aceptar que la ciencia da por válida la lógica deductiva, pero desearían que se les dijera mucho más."

Podríamos terminar diciendo que, por lo menos, el teorema de Bayes nos permite utilizar una lógica correcta para evaluar las pruebas en medicina; aun cuando nada puede decirnos de cómo fabricamos la probabilidad previa ni tampoco sobre la validez de las pruebas que utilizamos. Estas dos últimas son premisas que no deberíamos aceptar a pie juntillas. Para ello, seguimos necesitando utilizar el razonamiento científico complejo y completo, para así poder aceptarlas como válidas.