

Modelo matemático para el estudio del estado de tensión de las paredes de una arteria estenosada por un anillo rígido

Dr. ANIBAL INTROZZI (h.) * - Ing. ROBERTO MARSICANO ** - Ing. DAVID SCHTEINGART *** -
Sr. EDUARDO BALANOWSKY

RESUMEN

En el modelo utilizado, la existencia de un anillo rígido que impida la expansión sistólica de una arteria, daría lugar a la aparición de los siguientes fenómenos:

1º Se produce un aumento del radio máximo de la arteria a 4,8 mm. del borde del anillo (dilatación post-estenótica).

2º Se generan esfuerzos de corte Q_x , máximos en el borde del anillo, que se anulan a 2,4 mm. de éste, que dan origen a las tensiones de corte τ que son máximas en el plano medio de la pared arterial, las cuales tienden a cizallar una capa respecto de la otra.

* Jefe de Clínica del Servicio de Cirugía Cardiovascular del Policlínico Ferroviario Central.

** Profesor Titular de Mecánica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Bs. As.

*** Departamento de Física de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Bs. As.

3º Se generan momentos flexores M_x , máximos en el borde del anillo, que se anulan a 1,2 mm. de éste, que dan origen a las tensiones σ_r máximas en las caras externa e interna de la arteria, de compresión y tracción respectivamente. La normal tensión longitudinal a que se hallan sujetas todas las arterias tienden a disminuir la compresión de las fibras externas y a aumentar la tracción de las internas.

4º Se generan momentos flexores circunferenciales M_φ máximos en el borde del anillo, que se anulan a 1,2 mm. de éste, que dan origen a las tensiones σ circunferenciales, máximas en las caras externa e interna de la arteria, de compresión y tracción respectivamente. Efectuada la sumatoria de las tensiones σ σ_φ , esta última constante a lo largo de toda la arteria, cerca del anillo aumenta la tensión circunferencial en la cara interna y disminuye la de compresión en la externa.

INTRODUCCION

La alta incidencia de oclusiones de la arteria femoral a nivel del anillo tendinoso del 3er. aductor, nos ha llevado a estudiar las tensiones y deformaciones que sufriría la pared arterial al atravesar un anillo rígido.

La arteria femoral atraviesa a ese nivel un anillo tendinoso, prácticamente inextensible, que la circunda y fija en toda su circunferencia.

Dado que no existen medios técnicos que posibiliten mediciones directas de tensiones a distintos niveles del espesor de una arteria, el estudio se ha efectuado en base al modelo matemático expuesto por S. Timoshenko en su Teoría de Placas Planas y Curvas (Acme Agency, Bs. As., 1947).

METODO

Hemos considerado a la arteria como un tubo cilíndrico, perfectamente elástico, homogéneo y de espesor constante. Las características físicas y la presión a que ha sido sometido son aquéllas que se encuentran habitualmente en una arteria femoral.

Radio = $a = 5$ mm.

Espesor de la pared = $h = 0,7$ mm.

Módulo elástico de Young = 10^7 dinas cm^{-2} .

Presión arterial = 150/75 mm. de Hg.

Módulo de Poisson = $\nu = 0.5$.

La arteria se halla circundada por un anillo rígido de espesor despreciable y de radio igual al de la arteria en diástole, es decir que sólo es restrictivo de la expansión sistólica.

La existencia de un anillo que impida la expansión sistólica genera en la pared arterial tensiones y deformaciones que son debidas al momento flexor y al esfuerzo de corte.

El momento flexor es la fuerza que tiende a flexionar la pared sobre el anillo y el esfuerzo de corte la que tiende a arrancar un sector

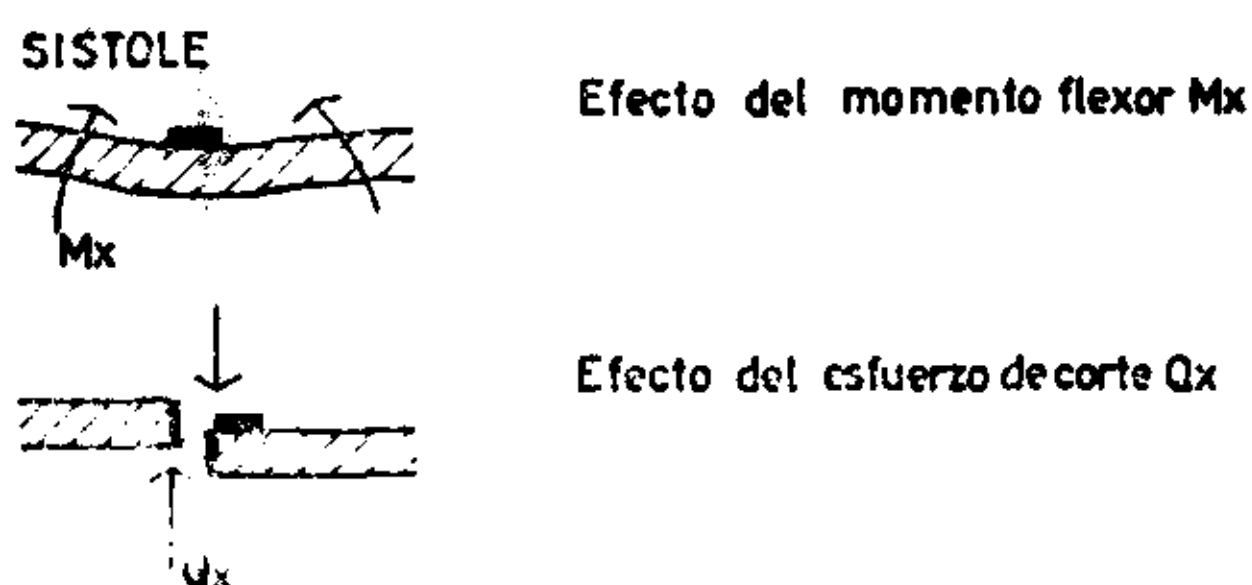


Gráfico N° 1

de la arteria del inmediato cercano (Gráfico N° 1).

Si el espesor h de la pared es despreciable con respecto al radio de la arteria y si suponemos que los desplazamientos Radiales y son pequeños, éstos están dados por una ecuación diferencial lineal de 4º orden en y (Timoshenko).

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4 \beta^4 y = \frac{Z}{D} \quad (1)$$

donde

x = abscisa de la sección correspondiente en cm.

y = desplazamiento o corrimiento en la dirección radial en cm.

β = constante dada por:

$$\beta^4 = \frac{3(1 - \nu^2)}{a^2 h^2} \quad (\text{cm}^{-2})$$

Z = carga por unidad de superficie (en nuestro caso presión diferencial) en dinas cm^{-2}

D = coeficiente de rigidez dado por

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

E = Módulo de Young en dinas cm^{-2}

ν Módulo de Poisson.

h Espesor de la pared en cm.

a Radio en cm.

La integración de la ecuación (1) para el caso que nos ocupa ha sido tratada por Timoshenko.

Para una presión diferencial igual a p se produce un momento flexor M_0 máximo, que por unidad de longitud circunferencial del anillo toma el valor:

$$M_0 = \frac{p}{2 \beta^2}$$

y un esfuerzo de corte Q_0 dado por

$$Q_0 = \frac{p}{\beta}$$

El desplazamiento radial y para cualquier x está dado por:

$$y = \frac{1}{2 \beta^3 D} [\beta M_0 \psi (\beta x) + Q_0 \theta (\beta x)] - \frac{p}{4 \beta^4 D}$$

Los momentos flexores M_x y los esfuerzos de corte Q_x para cualquier x , es decir para cualquier distancia al anillo están dados por:

$$M_x = \frac{d_x^2}{d^2 y} = \frac{1}{2 \beta} [\beta M_0 \varphi (\beta x) + Q_0 \zeta (\beta x)]$$

$$Q_x = -D \frac{d^3 y}{d x^3} = -2 \beta M_0 \zeta (\beta x) + Q_0 \psi (\beta x)$$

$$\varphi (\beta x); \zeta (\beta x) \quad \psi (\beta x); \theta (\beta x);$$

son funciones auxiliares dadas por

$$\psi (\beta x) = e^{-\beta x} (\cos \beta x - \operatorname{sen} \beta x)$$

$$\theta (\beta x) = e^{-\beta x} \cos \beta x$$

$$\varphi (\beta x) = e^{-\beta x} (\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x)$$

$$\zeta (\beta x) = e^{-\beta x} \operatorname{sen} \beta x$$

que han sido tabuladas por Timoshenko.

El punto de momento flexor nulo se obtiene para:

$$x = \pi/4 \beta$$

El punto de esfuerzo de corte nulo se obtiene para:

$$x = \pi/2 \beta$$

El momento flexor circunferencial viene dado por:

$$M_\varphi = \nu M_x$$

La tensión de corte máxima τ viene dada por:

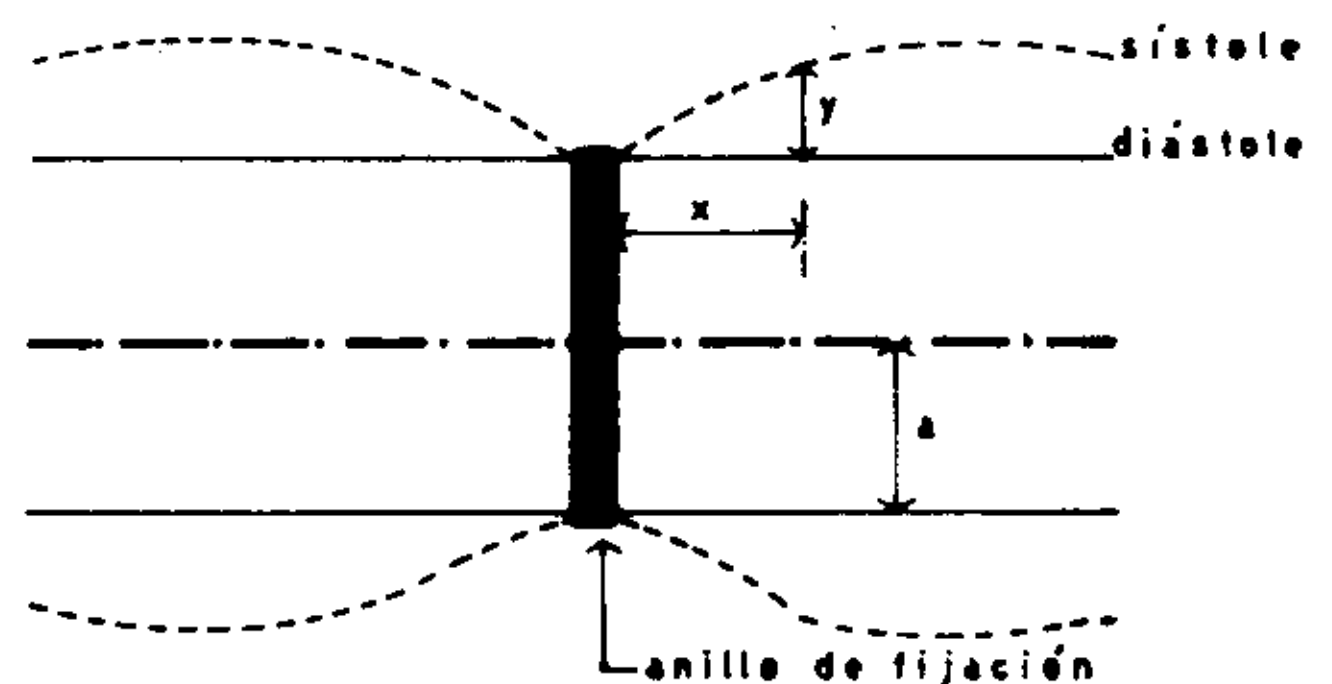
$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q_0}{F} \quad \text{donde } F = \text{sección en cm}^2$$

La tensión normal máxima debida al momento M_x viene dada:

$$\sigma_f = \frac{M_x}{W} \quad W = \frac{h^2}{6}$$

La tensión normal máxima debida al momento flexor circunferencial M_φ está dada por:

$$\sigma = \nu \sigma_f$$



Deformación por variación de presión, que sufre un tubo cilíndrico elástico fijado por un anillo rígido.

Gráfico N° 2

DEFORMACION RADIAL Y (Gráfico N° 2)

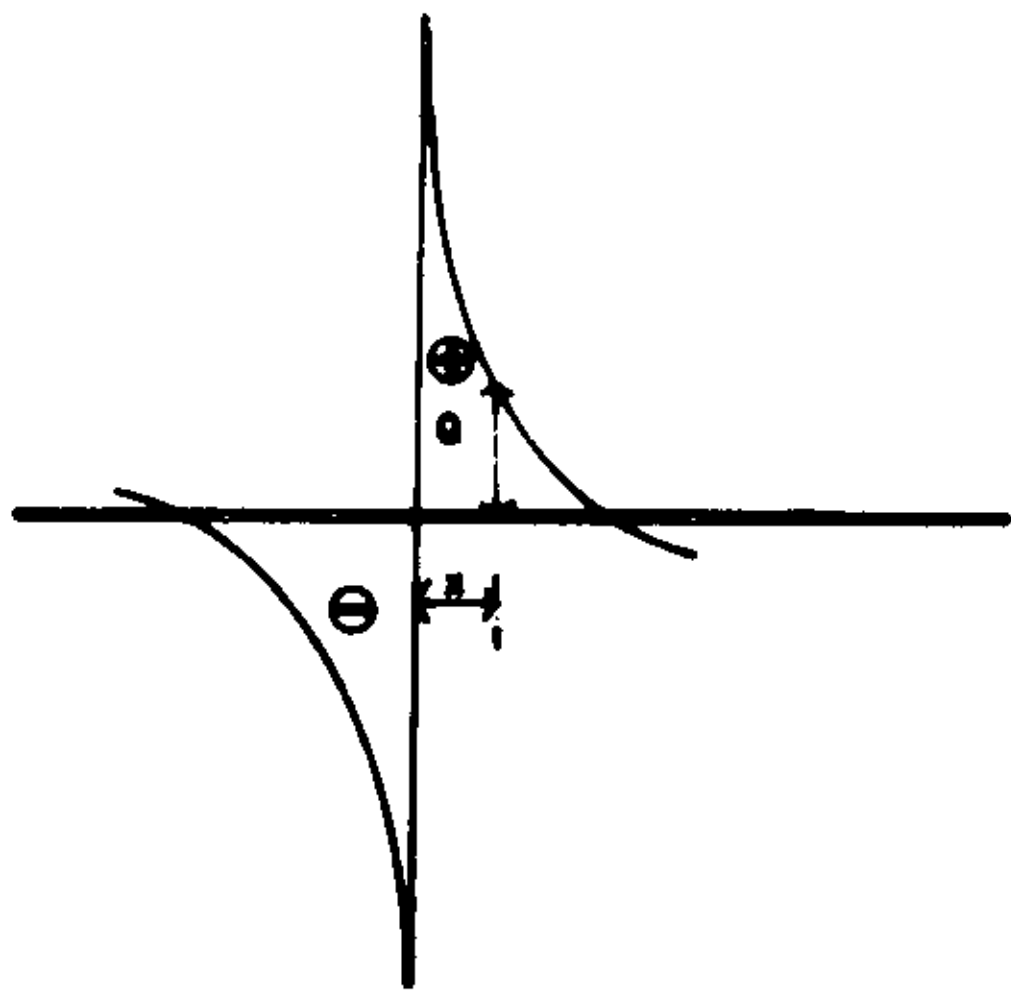
La presencia de un anillo que impida la expansión radial durante la sístole provoca una variación y en el radio, tal que cada sección perpendicular al eje arterial sigue siendo circular pero el radio aumenta a cada lado del anillo hasta alcanzar un máximo a 4,8 mm. de su borde, punto en el cual el radio es ligeramente mayor que en un sector cualquiera de la arteria. Como se ve, dicho aumento y del radio arterial ocurre sólo en el sector que media entre el anillo y 4,8 mm. de su borde.

TENSIONES DE CORTE (Gráfico N° 3)

Como consecuencia de la variación radial y dos sectores contiguos de arteria perpendiculares al eje sufren durante la sístole variaciones de radio diferentes, lo que tiende a desprender una de la otra, hecho éste que da origen al esfuerzo de corte Q_x de orientación radial cuya distribución a lo largo de la arteria es tal que el máximo se alcanza en el borde del anillo. A partir de allí cae bruscamente hasta llegar a cero a 2,4 mm. donde cambia el signo y se hace de magnitud despreciable.

El esfuerzo de corte Q_x origina la tensión de corte τ de sentido radial que se distribuye en todo el espesor de la arteria según una función parabólica tal que la intensidad es máxima en el plano medio y nula en la cara externa e interna de la arteria (Gráfico N° 4).

Por razones de equilibrio aparecen tensiones longitudinales que actúan en cada capa con-



Esfuerzos de corte en función de la distancia al anillo.

Gráfico N° 3

céntrica de la arteria y que tienden a cisallar una respecto de la otra. (Gráfico N° 5). La distribución de estas tensiones en el espesor de la arteria se hace según una función parabólica igual a la anterior, mientras que su distribución a lo largo es la misma que la del esfuerzo de corte Q_x que les dio origen, es decir que están fuertemente concentradas en el borde del anillo (Gráfico N° 3). La tensión de corte máxima calculada es de $0,33 \text{ Kg. cm}^{-2}$ que ocurre en el borde del anillo y se anula a $2,4 \text{ mm}$ de dicho borde.

TENSIONES DEBIDAS AL MOMENTO FLEXOR LONGITUDINAL M_x

La presión sistólica tiende a flexionar la pared arterial sobre el anillo, la que genera momentos longitudinales M_x de sentido opuesto hasta restablecer el equilibrio (Gráfico N° 6).

La intensidad máxima del momento flexor

DIAGRAMA DE TENSIONES DE CORTE EN LA DIRECCION RADIAL

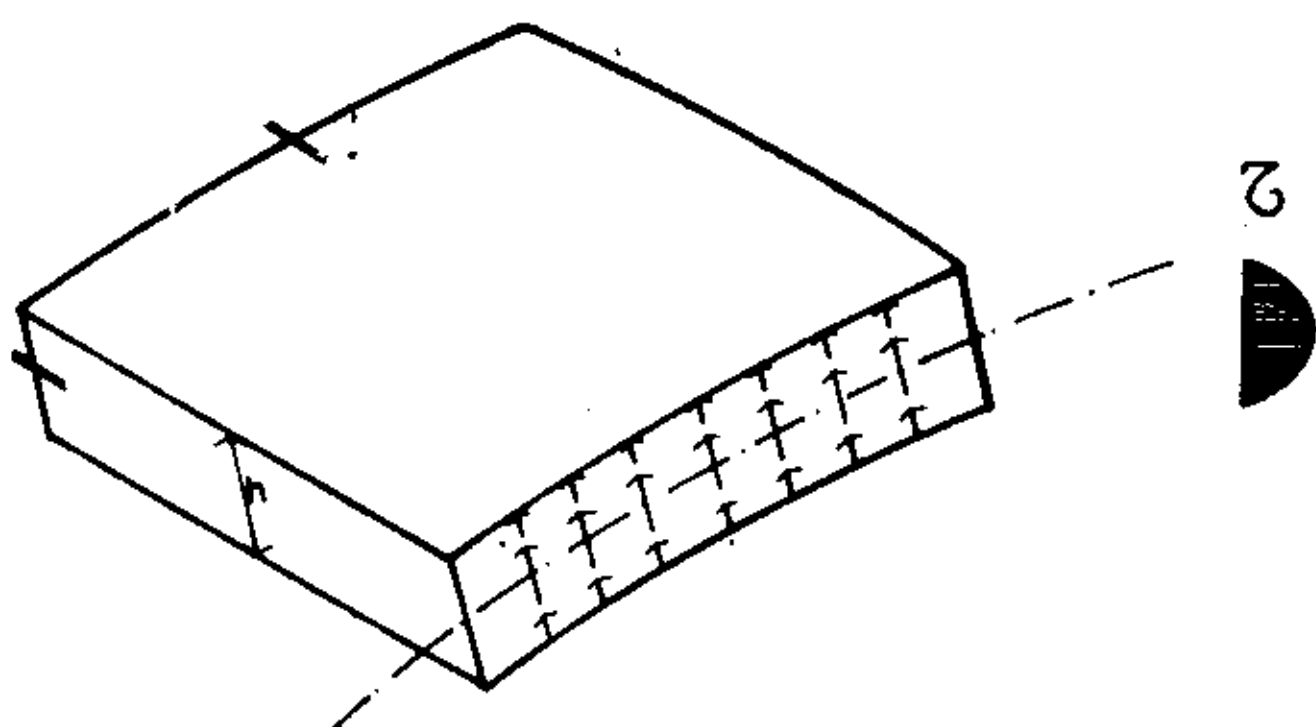


Gráfico N° 4

DIAGRAMA DE TENSIONES DE CORTE EN LA DIRECCION LONGITUDINAL.

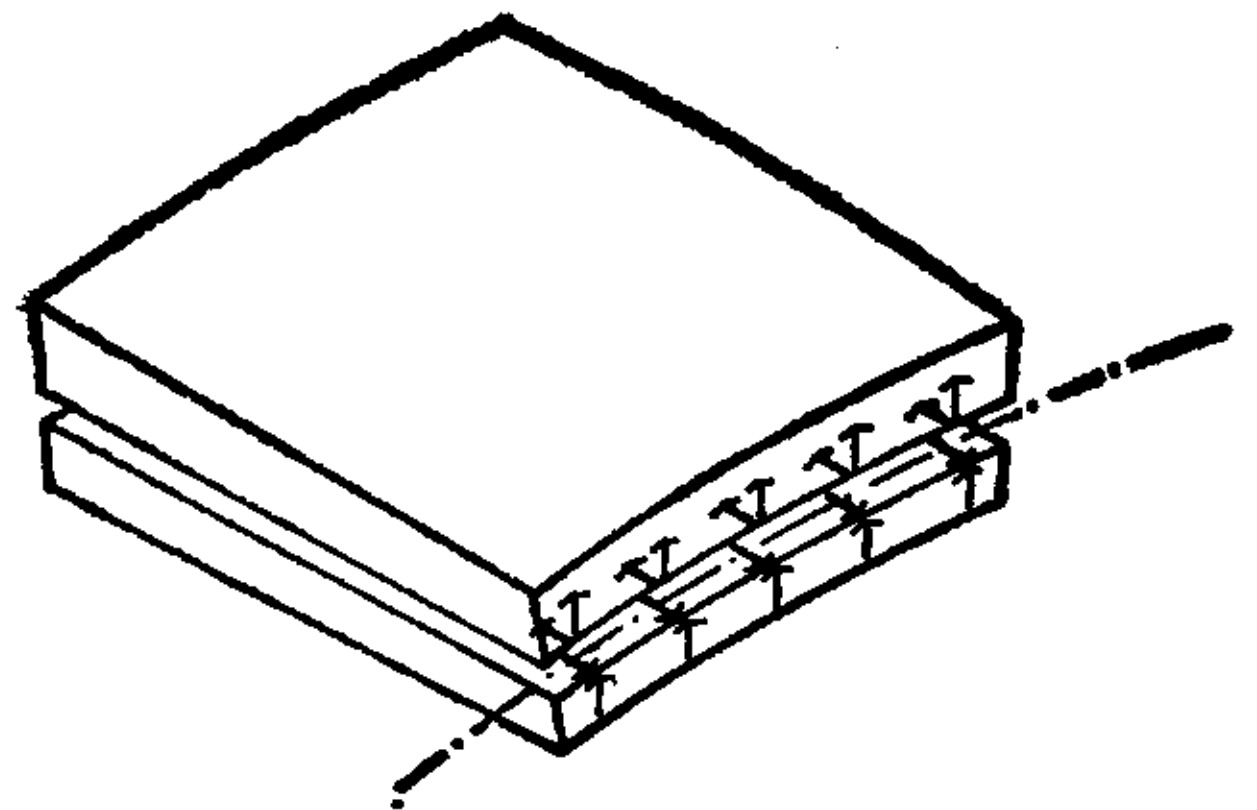


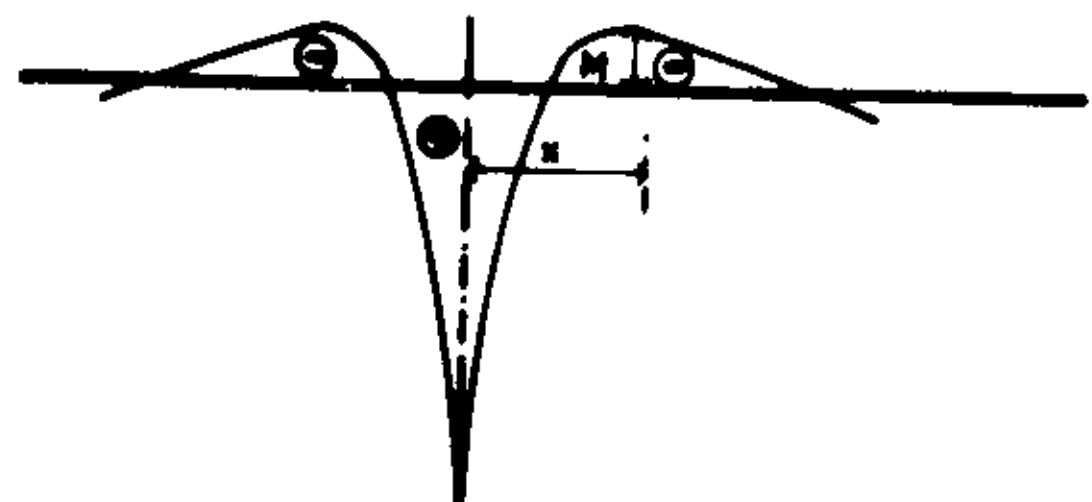
Gráfico N° 5

longitudinal M_x se halla en el borde del anillo, disminuyendo a partir de ese punto hasta anularse a $1,2 \text{ mm}$. donde cambia de signo y se hace de magnitud despreciable.

Las tensiones generadas por el momento flexor M_x son las σ_f que son longitudinales (Gráfico N° 7) y de máxima intensidad en la cara externa e interna de la arteria y nulas en el plano medio. En la cara externa tienden a comprimir las fibras longitudinales y en la interna a traccionarlas.

La intensidad de estas tensiones a lo largo de la arteria sigue la distribución del momento M_x , (Gráfico N° 6), es decir máximas en el borde del anillo. La tensión máxima calculada es de $1,42 \text{ Kg cm}^{-2}$, que se encuentra en el borde del anillo y se anula a $1,2 \text{ mm}$. de dicho borde.

Normalmente todas las arterias se hallan tensionadas longitudinalmente, cosa que se verifica al seccionarlas pues inmediatamente se retraen sus cabos. Dicho estado de tensión tiende por lo tanto, a disminuir la compresión de las fibras externas producidas por la tensión σ_f (Gráfico N° 7) y a aumentar la tracción



Momentos flectores en función de la distancia al anillo.

Gráfico N° 6

DIAGRAMA DE TENSIONES NORMALES σ_f DEBIDAS AL MOMENTO FLEXOR M_x , EN UNA ARTERIA NO TENSIONADA.

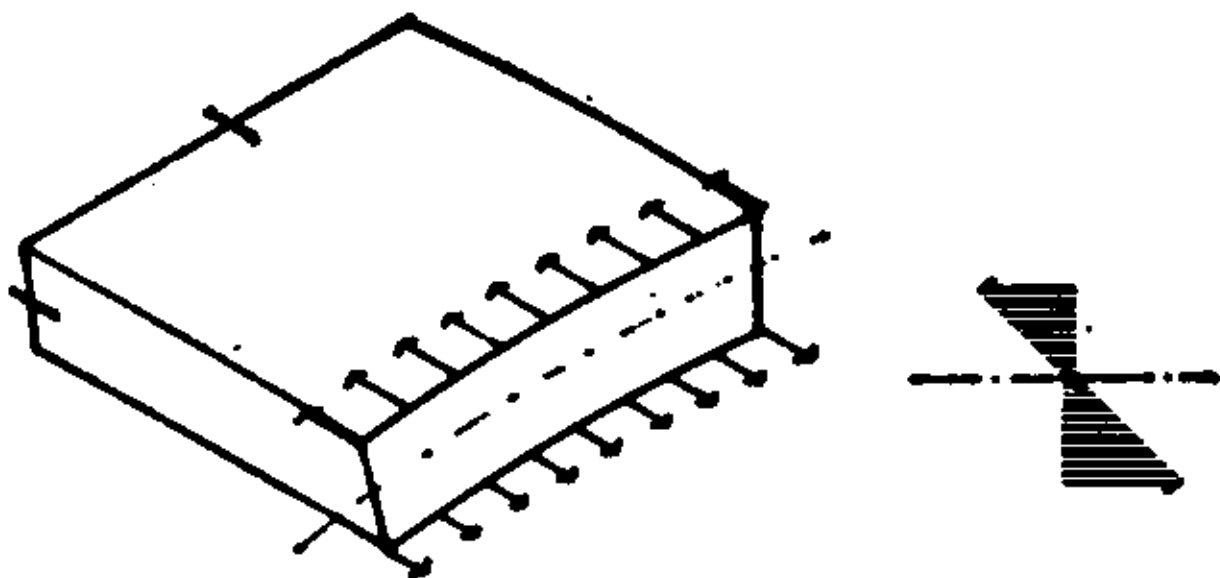


DIAGRAMA DE TENSIONES NORMALES DEBIDAS AL MOMENTO FLEXOR M_x Y AL ESTADO DE TENSION LONGITUDINAL (ARTERIA TENSIONADA)

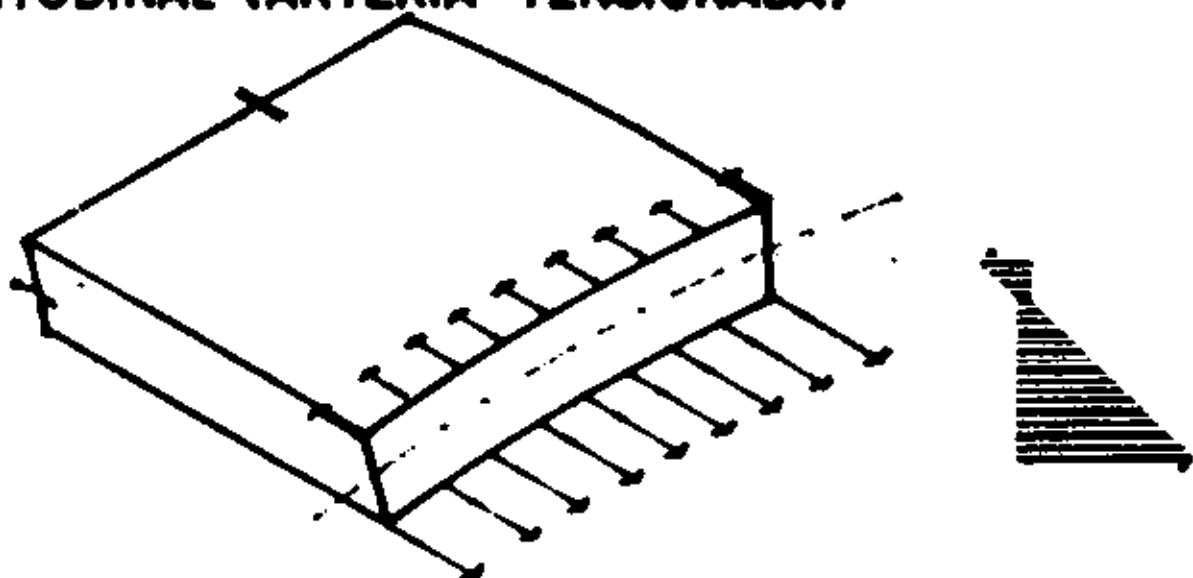


Gráfico N° 7

de las internas. En resumen, las tensiones σ_f son de mayor intensidad en la mitad interna del espesor de la arteria con el máximo en su cara interna (íntima y limitante elástica interna).

TENSIONES DEBIDAS AL MOMENTO FLEXOR CIRCUNFERENCIAL M_ϕ

Como consecuencia del acortamiento de las fibras externas y estiramiento de las internas debidas al momento flexor longitudinal M_x y dado que los corrimientos de una fibra circunferencial están en relación con el correspondiente de una longitudinal, aparece un momento flexor circunferencial M_ϕ . Este momento tiene una relación lineal con el longitudinal M_x , siendo su módulo igual al producto del módulo de Poisson, que es una constante, por el momento M_x , lo que implica que su distribución a lo largo de la arteria es igual a la del M_x (Gráf. N° 6). Las tensiones σ que genera son circunferenciales y producen acortamiento de las fibras externas y estiramiento de las internas (Gráfico N° 8) llegando su intensidad a un máximo en el borde del anillo, disminuyendo a partir de este punto en forma similar al momento que les da origen.

La tensión σ máxima calculada es de $0,71 \text{ Kg cm}^{-2}$, que se encuentra en el borde del anillo y se anula a $1,2 \text{ mm}$. de dicho punto.

A lo largo de cualquier arteria e independien-

temente a la existencia o no de un anillo, existe una tensión normal circunferencial σ_ϕ que es debida a la presión que hay dentro de la arteria.

Genéricamente, suponiendo que el espesor de la pared es muy pequeño, su valor es:

$$\frac{\text{PRESION} \times \text{RADIO}}{\text{ESPESOR}}$$

que sería igual en todo el espesor de la arteria. Pero si se considera el espesor de la pared, su distribución no es homogénea y está dada por;

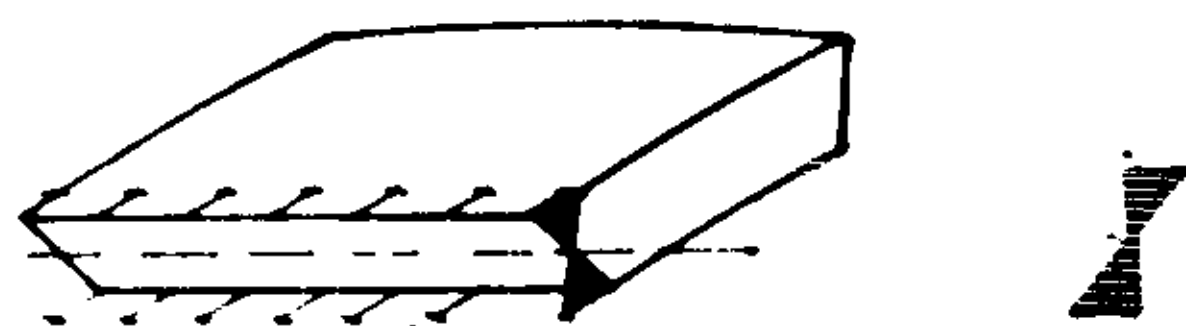
$$\sigma_\phi = \frac{P R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right)$$

donde R_1 y R_2 son los radios interior y exterior de la arteria respectivamente y r un radio intermedio cualquiera. Como se ve por esta fórmula la tensión circunferencial es mayor en la cara interna que en la externa. Si se hace la sumatoria de ambas tensiones circunferenciales

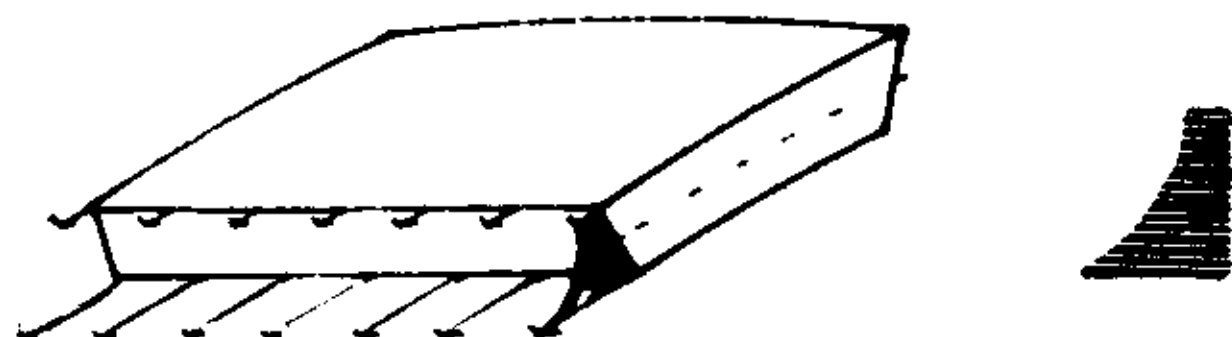
$$\sigma_\phi ; \sigma$$

se observa que cerca del anillo aumenta la tensión circunferencial en la cara interna y disminuye la de la cara externa (Gráfico N° 8).

TENSIONES CIRCUNFERENCIALES DEBIDAS AL MOMENTO FLEXOR M_ϕ



TENSIONES CIRCUNFERENCIALES DEBIDAS A LA PRESION INTERNA EN SISTOLE G_ϕ



TENSIONES CIRCUNFERENCIALES DEBIDAS A LA SUMA DE LOS EFECTOS ANTERIORES.

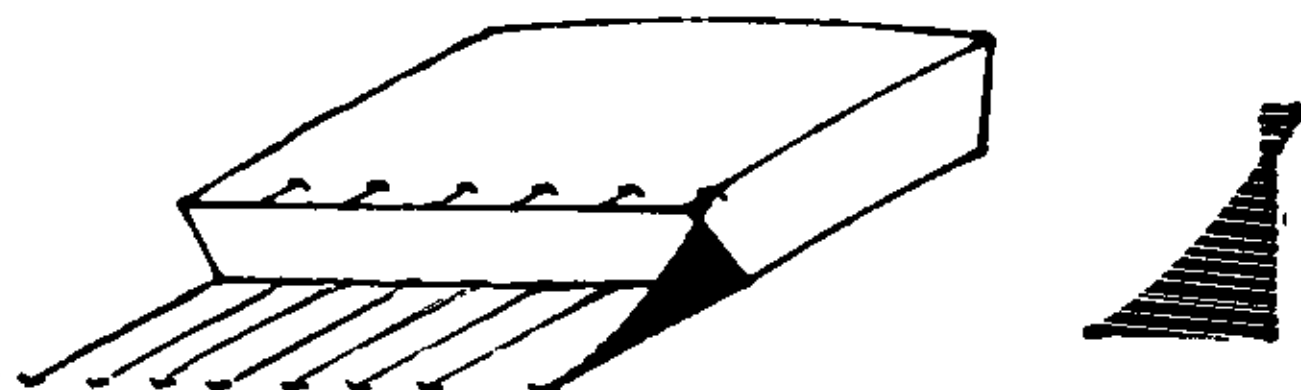


Gráfico N° 8

En resumen, la presencia del anillo tiende a aumentar la tensión de tracción circunferencial en la cara interna de la arteria y a disminuirla de la externa.

CONCLUSIONES

La reducida estenosis que representa un anillo que sólo impida la dilatación sistólica de una arteria, generaría una seria perturbación en la mecánica de la pared arterial en un sector próximo a dicho anillo.

En resumen, produciría la dilatación de la arteria tanto antes como después del anillo, aunque no mediaran turbulencias ni lesión producida por "jet".

Además aparecen en un sector cercano al anillo (no más de 5 mm. a cada uno de sus lados) tensiones de gran magnitud. Analizadas éstas se comprueba que tienen su mayor intensidad en las capas internas de la arteria.

Creemos que este fenómeno de concentración de tensiones en las capas internas puede estar relacionado con la fractura de la lámina elástica interna que se observa como una de las lesiones precoces de la arteriosclerosis en el sector de la arteria femoral cercano al anillo del 3er. aductor.

Dado que la irrigación de una arteria se efectúa desde su luz y está regulada por las gradientes de presión existentes entre capa y capa, es muy posible que la aparición de las tensiones

descriptas perturbe seriamente dichas gradientes con consecuencias inmediatas en la irrigación y permeabilidad del sector arterial, cercano al anillo siendo así posible que induzca o bien acelere la degeneración arteriosclerótica.

SUMMARY

A mathematical model for the study of the tension state of an artery by a rigid ring is presented.

The rigid ring radius is equal to the diastolic artery radius, so it prevents systolic artery expansion.

The conclusions obtained are the following:

a) An artery dilatation can be seen at both sides of the rigid ring (pre and post stenotic dilatation) independent of turbulence or "jet" lesion.

b) Longitudinal and circumferential tensions are seen at both sides of the rigid ring. Both of them predominantly in the inner layers of the arterial wall. They are strongly concentrated near the edges of the ring and disappears at 5 mm. of that point.

Femoral artery is limited by a rigid tendinous ring. Arteriosclerosis generally predominates around that area.

Tension concentration in internal layers would be related with internal elastic lamellae rupture on reduplication. It would also disturb pressure gradients that exist between the different layers that will disturb arterial irrigation.

Comparación entre extrasístoles auriculares precoces y con intervalo de acoplamiento de duración habitual

Dres.: **ROBERTO DELLA MORA, JULIAN CARLOS BASTAROLI, ALBERTO VAZQUEZ Y MARCOS ROZENBERG**

Instituto de Investigaciones Médicas
Hospital Tornú - Donato Alvarez 3000 - Buenos Aires

RESUMEN

Se determinaron los índices de acoplamiento (intervalo de acoplamiento/duración del ciclo auricular precedente) y de precocidad (intervalo de acoplamiento/intervalo entre el comienzo de P y el final de T en el latido normal preextrasistólico) en 126 pacientes con extrasistolia auricular.

Los casos fueron divididos en cuatro grupos según que el valor del índice de acoplamiento fuera igual o inferior a 0.60 (Ia) o superior a 0.60 (Ib), y el índice de precocidad igual o inferior a 0.95 (IIa) o superior a 0.95 (IIb).

Los parámetros evaluados fueron: edad, sexo, datos radiológicos, empleo de digitálicos, kalemia y natremia, arritmias asociadas, diagnóstico cardiológico y sobrevida. Los re-